Esercizi svolti sulle equazioni differenziali ordinarie

Equazione a variabili separabili

Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x\cos^2(y) \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\cos^2(y)$ si annulla in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ quindi poiché $y(0) = \frac{\pi}{4}$ la funzione $y(x)$ è definita su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Separiamo le variabili:

$$\frac{y'}{\cos^2(y)} = x \quad \Rightarrow \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{y} \frac{dt}{\cos^2(t)} = \int_0^x s\,ds \quad \Rightarrow \quad \Big[\tan t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{y} = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow \quad \tan y - 1 = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \arctan\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$$

La soluzione trovata verifica il P.C. ed è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$.

Equazione riconducibile alle variabili separabili mediante la sostituzione $\mathbf{y(x) = u(x) \cdot x}$

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{x^2}(xy + y^2) \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

L'equazione non è a variabili separabili ma operando con la sostituzione $y(x) = u(x)x$ ci si può ricondurre a tale forma:

$$y' = -\frac{1}{x^2}(xy + y^2) \quad \Rightarrow \quad (x\,u)' = -\frac{1}{x^2}(x\,(x\,u) + (x\,u)^2) \quad \Rightarrow \quad u + x\,u' = -\frac{1}{x^2}(x^2 u + x^2 u^2)$$
$$\Rightarrow \quad x\,u' = -u - u^2 - u \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{u^2 + 2u}{x}$$

Ora l'equazione è a variabili separabili, il P.C. diventa:

$$y(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad (-1)\cdot u(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(-1) = -1$$

e

$$\begin{cases} u' = -\frac{u^2+2u}{x} \\ u(-1) = -1 \end{cases}$$

Poiché u si annulla in 0 e -2 e il P.C. è $u(-1) = -1$ la soluzione $u \in]-2, 0[$.
Risolvendolo:

$$\frac{u'}{u^2 + 2u} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{u} \frac{dt}{t(t+2)} = \int_{-1}^{x} -\frac{1}{s}\,ds \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{u}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+2}\right)dt = \Big[\log|s|\Big]_{-1}^{x}$$
$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{2}\log|t+2|\right]_{-1}^{u} = \log|x| \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\log\frac{|t|}{|t+2|}\right]_{-1}^{u} = \log|x|$$

In un intorno del punto $(-1,-1)$: $u < 0$, $u + 2 > 0$, $x < 0$. Posso togliere quindi i valori assoluti facendo attenzione ai segni:

$$\log\left(\frac{-u}{u+2}\right) = 2\log(-x) \quad \Rightarrow \quad \frac{-u}{u+2} = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2x}{1+x^2}$$

La soluzione trovata verifica il P.C. ed è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$.

Equazione lineare del I ordine

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{1+x^2} y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si applica la formula:

$$y = e^{\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt} \left(0 + \int_0^x 1 \cdot e^{-\int_0^t \frac{s}{1+s^2} ds} dt \right) = e^{\frac{1}{2} \log(1+x^2)} \left(\int_0^x e^{-\frac{1}{2} \log(1+t^2)} dt \right) =$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+x^2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arcsinh}(x)$$

Studio qualitativo di un'equazione differenziale

Dato il seguente P.C.

$$\begin{cases} y' = 4 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sapendo che la soluzione è unica, continua e prolungabile su tutto $\mathbb{R}$:

1. Determinare la parte di grafico dove è definita la soluzione
2. Dimostrare che la funzione è dispari
3. Studiare la monotonìa della soluzione
4. Calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$
5. Calcolare la derivata seconda in funzione di y
6. Determinare la presenza di flessi e se possibile calcolarli
7. Disegnarne un grafico qualitativo

Soluzione

1. $4 - y^2 = (2-y)(2+y)$ quindi le soluzioni stazionarie sono $y = \pm 2$. Nessuna delle due risolve $y(0) = 0$ quindi $y \in]-\infty, -2[\cup]-2, 2] \cup]2, +\infty[$. Poiché $y(0) = 0$, $y \in]-2, 2[$.

2. La funzione è dispari se $y(x) = -y(-x)$ e quindi se $-y(-x)$ è essa stessa soluzione: $y(0) = 0$ è verificato inoltre,

$$(-y(-x))' = 4 - (-y(-x))^2 \quad \Rightarrow \quad y'(-x) = 4 - y^2(-x)$$

   poiché risolve lo stesso P.C. e la soluzione è unica, la funzione $y(x)$ è dispari.

3. Poiché $y \in]-2, 2[$, l'espressione $4 - y^2$ è sempre positiva, ed essendo la derivata di $y(x)$ indica che la funzione $y(x)$ è sempre crescente.

4. La funzione è sempre crescente e limitata quindi i limiti esistono. Essendo dispari basta trovare il limite a $+\infty$: sapendo che $y' = 4 - y^2$ se $\lim_{x\to+\infty} y(x) = l < 2$ allora $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 4 - l^2 > 0$ e la funzione crescerebbe all'infinito in modo lineare (avrebbe un asintoto obliquo). Questo non può accadere perché $y(x)$ è limitata pertanto la y' deve tendere a 0. L'unico modo affinché ciò accada è che $y(x)$ tenda a 2, quindi $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 2$ e per simmetria, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -2$.

5.

$$y' = 4 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y'' = -2\, y\, y' = -2\, y (4 - y^2)$$

6. Essendo $y'' = -2\,y(4-y^2)$ e $-2 < y < 2$, la derivata seconda è positiva solo quando $y < 0$ e negativa quando $y > 0$. La funzione è dispari e $y(0) = 0$ quindi se $y < 0$ anche $x < 0$ e viceversa. La funzione è pertanto convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. $(0, 0)$ è un flesso obliquo (in quel tratto la derivata prima non si annulla).

7. grafico in fondo

Equazione lineare del II ordine a coefficienti costanti

Risolvere il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = xe^{3x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Cerchiamo prima la soluzione della omogenea associata, il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^2$$

le cui soluzioni sono coincidenti $\lambda = 2$ e quindi si cerca una soluzione del tipo:

$$c_1 xe^{2x} + c_2 e^{2x}$$

Ora cerchiamo la soluzione particolare nella forma $(ax + b)e^{3x}$:

$$y'' - 4y' + 4y = ((ax + b)e^{3x})'' - 4((ax + b)e^{3x})' + 4((ax + b)e^{3x}) = \cdots = e^{3x}(ax + 2a + b)$$

Per cui:

$$e^{3x}(ax + 2a + b) = xe^{3x} \quad \Rightarrow \quad a = 1,\, b = -2$$

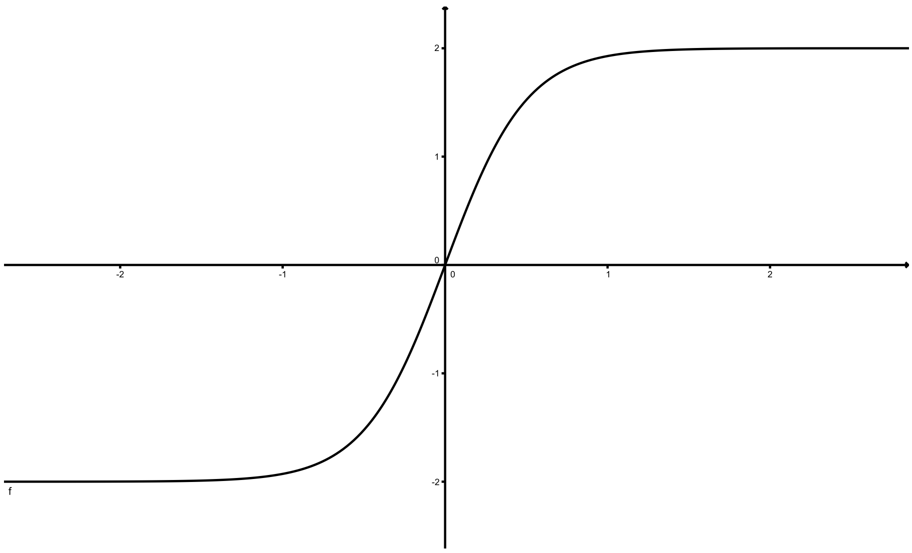
La soluzione generale del PC sarà:

$$y(x) = c_1 xe^{2x} + c_2 e^{2x} + e^{3x}(x - 2)$$

Imponendo le condizioni iniziali del PC,

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 \cdot e^0 + c_2 e^0 - 2e^0 = 1 \\ c_1 e^0 + 2c_1 \cdot 0 \cdot e^0 + 2c_2 e^0 - 6e^0 + e^0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 - 5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1, c_2 = 3$$

La soluzione generale è pertanto: $-xe^{2x} + 3e^{2x} + e^{3x}(x - 2)$.


2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
f