Matematica generale CTF

Il calcolo differenziale

Dott. Alessandro Gambini

17 novembre 2015

Rapporto incrementale e derivata

Funzioni derivabili
- Derivata della funzione inversa
- Primitiva
- Regole di derivazione

Derivata e monotonìa

Applicazioni del calcolo differenziale
- Calcolo di limiti
- Derivate di ordine superiore
- Massimi e minimi locali
- Intervalli di concavità

Polinomi di Taylor

Rapporto incrementale

Consideriamo una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ continua e cerchiamo di vederla come curva del piano cartesiano. Prendiamo in considerazione un punto P di coordinate $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in D$ in cui vogliamo determinare la pendenza della curva. Per fare questo una possibile strada è cercare la retta tangente in P al grafico della curva: l'inclinazione della retta tangente individuerà la pendenza.

Rapporto incrementale

Consideriamo una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ continua e cerchiamo di vederla come curva del piano cartesiano. Prendiamo in considerazione un punto P di coordinate $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in D$ in cui vogliamo determinare la pendenza della curva. Per fare questo una possibile strada è cercare la retta tangente in P al grafico della curva: l'inclinazione della retta tangente individuerà la pendenza. Attenzione! La tangente è un concetto **locale** e non globale!

Rapporto incrementale

Consideriamo un altro punto Q in modo che la differenza nelle ascisse tra P e Q sia h. Se uniamo P e Q con una retta otteniamo una secante alla curva. Ricordandoci che il punto P ha coordinate $(x_0, f(x_0))$, allora Q avrà coordinate $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. La pendenza della secante sarà :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

cioè $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ che è il rapporto tra i cateti di un triangolo rettangolo.

Rapporto incrementale

Consideriamo un altro punto Q in modo che la differenza nelle ascisse tra P e Q sia h. Se uniamo P e Q con una retta otteniamo una secante alla curva. Ricordandoci che il punto P ha coordinate $(x_0, f(x_0))$, allora Q avrà coordinate $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. La pendenza della secante sarà :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

cioè $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ che è il rapporto tra i cateti di un triangolo rettangolo. Questa espressione si chiama **rapporto incrementale** e in termini trigonometrici, chiamando α l'angolo compreso tra i due cateti, esso è $\tan \alpha$ (definita proprio come il rapporto tra cateto opposto e cateto adiacente ad un angolo α in un triangolo rettangolo).

Rapporto incrementale

Proviamo ora a tenere fisso il punto P e avvicinare sempre di più il punto Q al punto P facendo diventare l'incremento h sempre più piccolo fino a far *quasi* coincidere Q con P (cioè facciamo avvicinare sempre di più h a 0). Intuitivamente possiamo immaginare che la tangente geometrica al grafico della curva venga a coincidere con la posizione limite della famiglia di rette secanti. Analiticamente, questo si traduce nel fatto che la retta tangente, se esiste, ha per coefficiente angolare il limite della famiglia dei coefficienti angolari delle rette secanti.

Definizione di derivata

Si dice derivata di una funzione $f(x)$ nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$, se esiste ed è finito, il seguente limite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se chiamiamo $x = x_0 + h$ e facciamo tendere x a x_0 otteniamo la definizione equivalente:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esempio

La derivata della funzione $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$ vale 2 e in generale $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2hx + x^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 2x) = 2x$$

Continuità e derivabilità

Occorre capire ora se una funzione è sempre derivabile e, in particolare, qual è il legame tra le funzioni continue e le funzioni derivabili in quanto ha poco senso parlare di pendenza di una curva quando la suddetta curva non è continua in un determinato punto.

Funzioni continue non derivabili

I grafico della funzione $f(x) = |x|$ è costituito da due semirette che si incontrano nell'origine, ma qual è la pendenza in $x = 0$? Calcoliamola come limite del rapporto incrementale per $h \to 0^-$ e per $h \to 0^+$ (in questo caso si parla di **derivata sinistra** e **derivata destra**):

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \quad 1$$

Funzioni continue non derivabili

I grafico della funzione $f(x) = |x|$ è costituito da due semirette che si incontrano nell'origine, ma qual è la pendenza in $x = 0$? Calcoliamola come limite del rapporto incrementale per $h \to 0^-$ e per $h \to 0^+$ (in questo caso si parla di **derivata sinistra** e **derivata destra**):

$$
\begin{aligned}
f'_-(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \\
f'_+(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \quad 1
\end{aligned}
$$

I due limiti sono diversi, se derivata destra e sinistra sono due numeri reali distinti allora graficamente il punto di non derivabilità si chiama **punto angoloso**

Funzioni continue non derivabili

Studiamo ora il comportamento della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ quando $x = 0$. La funzione è chiaramente continua in quel punto ma se disegniamo la retta tangente in 0 essa è verticale; non si può quindi parlare di *pendenza* in quanto dovremmo parlare di *pendenza infinita*. In effetti calcolando la derivata in 0 è proprio quello che succede, il limite del rapporto incrementale non è finito e quindi la funzione non è derivabile in 0:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

In questo caso si parla di **flesso verticale** ascendente (discendente se il limite valesse $-\infty$).

Funzioni continue non derivabili

Un ultimo caso è analogo al precedente (la differenza è nel fatto che in questo caso derivata destra e sinistra oltre ad essere entrambe infinite, sono infinite con segno discorde), è il caso di $f(x) = \left|\sqrt[3]{x}\right|$ funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ ma che in $x = 0$ presenta quella che si chiama una **cuspide** (x_0 è una *cuspide* quando i limiti del rapporto incrementale destro e sinistro in x_0 sono infiniti di segno opposto):

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left|\sqrt[3]{0+h}\right| - \left|\sqrt[3]{0}\right|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left|\sqrt[3]{h}\right|}{h} = -\infty$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left|\sqrt[3]{0+h}\right| - \left|\sqrt[3]{0}\right|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left|\sqrt[3]{h}\right|}{h} = +\infty$$

Funzioni continue non derivabili

E' vero però, come avevamo dedotto intuitivamente all'inizio del paragrafo che la continuità è una **condizione necessaria** per la derivabilità, e questo lo si può dimostrare anche analiticamente:

Funzioni continue non derivabili

E' vero però, come avevamo dedotto intuitivamente all'inizio del paragrafo che la continuità è una **condizione necessaria** per la derivabilità, e questo lo si può dimostrare anche analiticamente:
Dimostrazione Se $f(x)$ è derivabile in x_0, esiste ed è finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e quindi per $x \to x_0$, $f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Se facciamo il limite a entrambi i membri,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

che non è altro la definizione di funzione continua in x_0.

Dominio

Questo fatto ha effetto anche sul dominio della funzione derivata che in generale è sempre contenuto o al più uguale al dominio della funzione di partenza: ad esempio la funzione $f(x) = \ln(x)$ come vedremo, ha derivata prima $f'(x) = \frac{1}{x}$. Il dominio della funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ sarebbe più grande del dominio di $f(x) = \ln(x)$ ma il dominio della derivata non può essere più grande del dominio della funzione e quindi saremo costretti a prendere in considerazione per $f'(x)$ solo i valori positivi delle x.

Dominio

Questo fatto ha effetto anche sul dominio della funzione derivata che in generale è sempre contenuto o al più uguale al dominio della funzione di partenza: ad esempio la funzione $f(x) = \ln(x)$ come vedremo, ha derivata prima $f'(x) = \frac{1}{x}$. Il dominio della funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ sarebbe più grande del dominio di $f(x) = \ln(x)$ ma il dominio della derivata non può essere più grande del dominio della funzione e quindi saremo costretti a prendere in considerazione per $f'(x)$ solo i valori positivi delle x.
Se $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ è continua e derivabile con derivata continua diciamo che $f \in C^1(I)$.

Calcolo della derivata

Già con la sola interpretazione geometrica della derivata abbiamo intuito che la derivata di una funzione costante è nulla e che la derivata di una funzione lineare è il valore del coefficiente angolare della retta da essa rappresentata e quindi ha valore costante. Infatti:

$$\text{Se } f(x) = k \in \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

$$\text{Se } f(x) = mx + q, \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + q - (mx+q)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

Calcolo della derivata

Abbiamo già visto cosa succede per $f(x) = x^2$, vediamo in generale il comportamento della derivata di $f(x) = x^n$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + o(h) - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Per calcolare il limite abbiamo usato l'approssimazione $(x+h)^n \sim x^n + nx^{n-1}h + o(h)$ per $h \to 0$ (dal Binomio di Newton) e abbiamo quindi supposto $n \in \mathbb{N}$. Senza perdere di generalità è però possibile definire la derivata di $f(x) = x^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Calcolo della derivata

Una funzione molto speciale è $f(x) = e^x$: la sua peculiarità sta nel fatto che la sua derivata è uguale a sè stessa ed è quindi una sorta di *elemento neutro* per l'operazione di derivazione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Per tutte le altre funzioni rimandiamo alla tabella delle derivate delle funzioni elementari che si possono facilmente trovare anche sul web, ad esempio: tabella derivate funzioni elementari

Derivata della funzione inversa

Sia $f(x) :]a, b[\to \mathbb{R}$ strettamente monotòna, invertibile e derivabile in $x_0 \in]a, b[$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione: Possiamo ottenere la formula scrivendo la definizione di derivata della funzione inversa partendo dal limite del rapporto incrementale per $f^{-1}(y)$ e ricordando che $x_0 = f^{-1}(y_0)$:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempio

Calcoliamo ad esempio la derivata della funzione $x = \arctan(y)$ (inversa della $y = \tan(x)$):

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

Esempio

Calcoliamo ad esempio la derivata della funzione $x = \arctan(y)$ (inversa della $y = \tan(x)$):

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

Allo stesso modo possiamo calcolare le inverse di tutte le funzioni trigonometriche e iperboliche e anche la derivata del $\ln(x)$ come inversa di e^x.

Primitiva

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $F : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e derivabile tale che $F'(x) = f(x)$ si dice che $F(x)$ è una **primitiva di una funzione** di $f(x)$.

Primitiva

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $F : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e derivabile tale che $F'(x) = f(x)$ si dice che $F(x)$ è una **primitiva di una funzione** di $f(x)$.
A differenza della derivata, la primitiva di una funzione non è unica perché se $F'(x) = f(x)$ anche $(F + k)'(x) = f'(x)$ in quanto la derivata di una costante è nulla. Possiamo dire che la primitiva è unica a meno di una costante additiva. Con tale definizione possiamo dire ad esempio che $\ln(x)$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ o che e^x è una primitiva di e^x.

Prodotto per una costante

Analizziamo ora le derivate di funzioni che sono la somma, il prodotto, il quoziente, la composizione delle funzioni elementari.
La derivata di una funzione moltiplicata per una costante k reale è uguale alla costante per la derivata della funzione:

$$(kf)' = kf'$$

Prodotto per una costante

Analizziamo ora le derivate di funzioni che sono la somma, il prodotto, il quoziente, la composizione delle funzioni elementari.
La derivata di una funzione moltiplicata per una costante k reale è uguale alla costante per la derivata della funzione:

$$(kf)' = kf'$$

Dimostrazione

$$\lim_{h\to 0} \frac{k\,f(x+h) - k\,f(x)}{h} = k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k\,f'(x)$$

Derivata della somma

La derivata di una somma (o differenza) è la somma (o differenza) delle derivate:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Derivata della somma

La derivata di una somma (o differenza) è la somma (o differenza) delle derivate:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Dimostrazione

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Derivata del prodotto

La derivata del **prodotto** di due funzioni è la somma della derivata della prima per la seconda non derivata con la derivata della seconda per la prima non derivata: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Derivata del prodotto

La derivata del **prodotto** di due funzioni è la somma della derivata della prima per la seconda non derivata con la derivata della seconda per la prima non derivata: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Dimostrazione

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - (f(x)g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - (f(x)g(x)) + f(x+h)gx) - f(x+h)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Derivata del quoziente

La derivata del **quoziente** di due funzioni è la differenza tra la derivata del numeratore per il denominatore non derivato e la derivata del denominatore per il numeratore non derivato, tutto diviso per il quadrato del denominatore non derivato:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{(g)^2}$$

Derivata delle funzioni composte

La derivata della **composizione** tra due (o più) funzioni è data dalla seguente formula detta **chain rule**:

$$(f(g(x)))' = (f \circ g(x))' = \left(f' \circ g(x)\right) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Monotonìa

Un punto $c \in I$ si dice **stazionario o punto critico** per $f : I \to \mathbb{R}$ se $f'(c) = 0$ cioè se la sua pendenza è nulla e quindi la retta tangente in quel punto è una retta orizzontale. Sono punti stazionari i punti di **minino relativo**, di **massimo relativo** e anche i cosiddetti **flessi orizzontali**. Un punto stazionario infatti non è necessariamente un massimo o minimo locale; ad esempio se analizziamo la funzione $f(x) = x^3$ in $x = 0$ notiamo che la tangente è orizzontale ma la funzione non possiede nè massimi nè minimi in quel punto.

Monotonìa

Se f è strettamente **crescente** in un certo intervallo, $f' \geq 0$ (nota bene che f' è crescente ma **non strettamente**, infatti essa può essere anche nulla). Possiamo analizzare ancora una volta $f(x) = x^3$, strettamente crescente in ogni punto, anche in 0 ma con derivata che si annulla in $x = 0$.

Monotonìa

Se f è strettamente **crescente** in un certo intervallo, $f' \geq 0$ (nota bene che f' è crescente ma **non strettamente**, infatti essa può essere anche nulla). Possiamo analizzare ancora una volta $f(x) = x^3$, strettamente crescente in ogni punto, anche in 0 ma con derivata che si annulla in $x = 0$.
Analogamente, se f è strettamente **decrescente** in un certo intervallo, $f' \leq 0$.

Monotonìa

Se f è strettamente **crescente** in un certo intervallo, $f' \geq 0$ (nota bene che f' è crescente ma **non strettamente**, infatti essa può essere anche nulla).
Possiamo analizzare ancora una volta $f(x) = x^3$, strettamente crescente in ogni punto, anche in 0 ma con derivata che si annulla in $x = 0$.
Analogamente, se f è strettamente **decrescente** in un certo intervallo, $f' \leq 0$.
Nota bene: la monotonìa di una funzione ha una definizione che non ha nulla a che fare con la derivata! Una funzione può essere monotòna anche se non è continua nè tanto meno derivabile!

Teorema di Fermat

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in I$. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Fermat

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in I$. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione $f(x)$ allora $f'(x_0) = 0$.
Come abbiamo visto non è vero il viceversa e un controesempio è la funzione $f(x) = x^3$ in $x = 0$ (punto in cui la funzione ha un flesso orizzontale).

Teorema di Rolle

Data una funzione f continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ con $f(a) = f(b)$ allora

$$\exists\, c \in]a, b[\,:\; f'(c) = 0$$

Teorema di Rolle

Data una funzione f continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ con $f(a) = f(b)$ allora

$$\exists\, c \in]a, b[\; : \; f'(c) = 0$$

In poche parole il teorema ci assicura l'esistenza di **almeno** un punto con tangente orizzontale per una funzione derivabile su un intervallo in cui agli estremi la funzione assume lo stesso valore. Chiaramente questo non è vero per una funzione non derivabile: ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$ assume lo stesso valore agli estremi ma non ha punti con tangente orizzontale (il punto di minimo $x = 0$ è un punto in cui la funzione non è derivabile).

Teorema di Lagrange

Data una funzione f continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ allora

$$\exists\, c \in \,]a, b[\,:\ \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema di Lagrange

Data una funzione f continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ allora

$$\exists\, c \in]a, b[\ :\ \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

In altre parole il teorema ci assicura l'esistenza di **almeno** un punto in cui la retta tangente alla curva ha la stessa pendenza della retta che unisce i punti $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema di Lagrange

Data una funzione f continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ allora

$$\exists\, c \in]a, b[\; : \;\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

In altre parole il teorema ci assicura l'esistenza di **almeno** un punto in cui la retta tangente alla curva ha la stessa pendenza della retta che unisce i punti $f(a)$ e $f(b)$.
Se i due punti hanno la stessa ordinata la retta in questione è orizzontale e il teorema di Lagrange si riconduce al Teorema di Rolle che ne diventa quindi un caso particolare; la dimostrazione del teorema di Lagrange si effettua utilizzando il teorema di Rolle.

Teorema di De L'Hospital

Ipotesi:

1. siano f e g funzioni derivabili in un intorno I del punto x_0,
2. sia $g'(x_0) \neq 0$ su $I - \{x_0\}$,
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$
4. $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Teorema di De L'Hospital

Ipotesi:

1. siano f e g funzioni derivabili in un intorno I del punto x_0,
2. sia $g'(x_0) \neq 0$ su $I - \{x_0\}$,
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$
4. $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Tesi:

1. $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$,
2. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Teorema di De L'Hospital

In altre parole se il limite del rapporto tra due funzioni è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ed esiste il limite del rapporto tra le derivate delle funzioni stesse, allora questo è uguale al limite del rapporto tra le funzioni di partenza[1].

[1] Vale anche per i limiti con $x \to \infty$.

Teorema di De L'Hospital

In altre parole se il limite del rapporto tra due funzioni è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ed esiste il limite del rapporto tra le derivate delle funzioni stesse, allora questo è uguale al limite del rapporto tra le funzioni di partenza[1].

Attenzione a non abusare di questo teorema: può funzionare soltanto quando si parte da una situazione in cui siamo in presenza di una forma indeterminata e si può applicare solo nei casi in cui esiste il limite del rapporto delle derivate.

[1] Vale anche per i limiti con $x \to \infty$.

Teorema di De L'Hospital

Esempi in cui non si può utilizzare

Alcuni casi in cui non si può utilizzare il teorema:

Teorema di De L'Hospital

Esempi in cui non si può utilizzare

Alcuni casi in cui non si può utilizzare il teorema:

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$
  Non siamo di fronte a una forma indeterminata. Se si utilizzasse erroneamente De L'Hospital, otterremmo $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty.$

Teorema di De L'Hospital

Esempi in cui non si può utilizzare

Alcuni casi in cui non si può utilizzare il teorema:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty.$
  Non siamo di fronte a una forma indeterminata. Se si utilizzasse erroneamente De L'Hospital, otterremmo $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{x-\cos(x)}$ dà luogo a una forma indeterminata e si risolve facilmente considerando il comportamento asintotico delle funzioni: il risultato è 1. Non possiamo applicare De L'Hospital, in quanto $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\cos(x)}{1+\sin(x)}$ non esiste! Il teorema è inefficace.

Derivate di ordine superiore

Per una funzione $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ è possibile definire anche le cosiddette derivate di ordine superiore che sono sostanzialmente l'applicazione dell'operatore derivata più di una volta. Se lo applichiamo due volte, chiaramente oltre ad avere f derivabile è necessario che anche f' sia derivabile, cioè f due volte derivabile; si parla dunque di derivata seconda quando si fa la derivata della derivata e si indica $f''(x)$ o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Derivate di ordine superiore

Equivalentemente si può parlare di derivata terza, $f'''(x)$, quarta e così via. In generale la derivata di ordine n per una funzione n volte derivabile si indica con $f^{(n)}(x)$ o $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$. Una funzione n volte derivabile su un intervallo I si dice appartenente a $C^n(I)$; se la funzione è infinite volte derivabile si dice che $f \in C^\infty(I)$. Tutti i polinomi, le funzioni esponenziali e logaritmiche e le funzioni trigonometriche sono infinite volte derivabili nel loro dominio di definizione.

Derivate di ordine superiore

Equivalentemente si può parlare di derivata terza, $f'''(x)$, quarta e così via. In generale la derivata di ordine n per una funzione n volte derivabile si indica con $f^{(n)}(x)$ o $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$. Una funzione n volte derivabile su un intervallo I si dice appartenente a $C^n(I)$; se la funzione è infinite volte derivabile si dice che $f \in C^\infty(I)$. Tutti i polinomi, le funzioni esponenziali e logaritmiche e le funzioni trigonometriche sono infinite volte derivabili nel loro dominio di definizione.

Le derivate di ordine superiore ci consentono un'analisi più approfondita dello studio di una funzione e un ruolo molto importante lo gioca la derivata seconda.

Massimi e minimi locali

Se $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$, sappiamo che essa ha dei punti stazionari $x_0 \in I$ se $f'(x_0) = 0$. Questo però non è sufficiente per classificare i punti critici; per farlo abbiamo bisogno di ulteriori informazioni. Infatti, per capire se un punto stazionario è un massimo o un minimo o un flesso orizzontale possiamo utilizzare due metodi: il test della derivata prima e il test della derivata seconda (che consistono negli studi dei segni delle derivate, prime e seconde).

Test della derivata prima

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

Test della derivata prima

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

- se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un **punto di massimo locale** e $f(x_0)$ un **massimo locale**;

Test della derivata prima

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

- se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un **punto di massimo locale** e $f(x_0)$ un **massimo locale**;
- se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un **punto di minimo locale** e $f(x_0)$ un **minimo locale**;

Test della derivata prima

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

- se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un **punto di massimo locale** e $f(x_0)$ un **massimo locale**;
- se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un **punto di minimo locale** e $f(x_0)$ un **minimo locale**;
- se $f'(x)$ ha lo stesso segno in tutto un intorno di x_0 allora x_0 è un **punto di flesso orizzontale** (crescente o decrescente a seconda del segno).

Test della derivata seconda

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

Test della derivata seconda

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

- se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un **punto di minimo locale**;

Test della derivata seconda

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

- se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un **punto di minimo locale**;
- se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un **punto di massimo locale**.

Test della derivata seconda

Sia f una funzione derivabile e sia x_0 **un punto critico** per f, cioè $f'(x_0) = 0$, allora:

- se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un **punto di minimo locale**;
- se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un **punto di massimo locale**.

Se $f''(x_0) = 0$ il test è inefficace ed è necessario ricorrere alle derivate di ordine superiore.

Definizione di concavità

In termini informali una funzione f si dice **concava verso l'alto o convessa** su un intervallo I interno al dominio di definizione se dati due punti a e b interni a I tali che $a < b$ il segmento che congiunge i due punti si trova sempre *sopra* al grafico della funzione. Viceversa una funzione si dice **concava verso il basso o semplicemente concava** se dati due punti a e b interni a I tali che $a < b$. il segmento che congiunge i due punti si trova sempre *sotto* al grafico della funzione.

Definizione di concavità

In termini informali una funzione f si dice **concava verso l'alto o convessa** su un intervallo I interno al dominio di definizione se dati due punti a e b interni a I tali che $a < b$ il segmento che congiunge i due punti si trova sempre *sopra* al grafico della funzione. Viceversa una funzione si dice **concava verso il basso o semplicemente concava** se dati due punti a e b interni a I tali che $a < b$. il segmento che congiunge i due punti si trova sempre *sotto* al grafico della funzione.

Qualora la funzione sia derivabile, possiamo dire che

- se la funzione è convessa allora la *retta tangente* in ogni punto interno all'intervallo si trova sempre sotto al grafico della funzione
- se la funzione è concava allora la *retta tangente* in ogni punto interno all'intervallo si trova sempre sopra al grafico della funzione

Intervalli di concavità

I punti x_0 in cui la funzione cambia concavità sono i **punti di flesso** della funzione. Se la funzione è crescente in x_0 allora x_0 è un **flesso ascendente**, se essa è decrescente in in x_0 allora x_0 è un **flesso discendente**.

Intervalli di concavità

I punti x_0 in cui la funzione cambia concavità sono i **punti di flesso** della funzione. Se la funzione è crescente in x_0 allora x_0 è un **flesso ascendente**, se essa è decrescente in in x_0 allora x_0 è un **flesso discendente**.
Inoltre, se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione due volte derivabile, $f''(x)$ ci fornisce importanti informazioni sulla concavità della funzione stessa e quindi ci permette di individuarne i punti di flesso (per farlo possiamo utilizzare il *test di concavità*).

Intervalli di concavità

I punti x_0 in cui la funzione cambia concavità sono i **punti di flesso** della funzione. Se la funzione è crescente in x_0 allora x_0 è un **flesso ascendente**, se essa è decrescente in in x_0 allora x_0 è un **flesso discendente**.
Inoltre, se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione due volte derivabile, $f''(x)$ ci fornisce importanti informazioni sulla concavità della funzione stessa e quindi ci permette di individuarne i punti di flesso (per farlo possiamo utilizzare il *test di concavità*).
Nota bene: I punti di flesso rappresentano generalmente i punti in cui la funzione ha massima (o minima) pendenza: essendo punti che annullano la derivata seconda, i flessi sono dei punti stazionari per la derivata prima e, nel caso questi punti stazionari per la derivata prima rappresentino dei massimi o minimi locali, essi sono chiaramente punti di massima o minima pendenza della funzione.

Test di concavità

- Se $f''(x) > 0$ la funzione è strettamente convessa.
- Se $f''(x) < 0$ la funzione è strettamente concava.

Polinomi di Taylor

Poiché i polinomi sono le funzioni più *facili* da trattare e analizzare, quando si riesce è molto comodo approssimare funzioni complicate ad essi. Cerchiamo quindi un metodo per approssimare una qualsiasi funzione per mezzo di un polinomio in un intorno di un determinato punto. Questo procedimento è già stato effettuato nello studio della retta tangente a una funzione in un punto interno al dominio della stessa: abbiamo già visto infatti che essa rappresenta il polinomio di Taylor di primo grado in quel punto. Per ottenere una approssimazione migliore della funzione in un punto occorre però ricorre a polinomi di grado superiore.

Polinomi di Taylor

Prendiamo una funzione $f \in C^1(I)$ e un punto $x_0 \in I$: la retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Polinomi di Taylor

Prendiamo una funzione $f \in C^1(I)$ e un punto $x_0 \in I$: la retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è il polinomio di Taylor di primo grado della funzione e si può indicare $T_{1,x_0}(f)$ cioè polinomio di Taylor di grado 1 in x_0. La funzione può essere quindi approssimata in un intorno di x_0:

Polinomi di Taylor

Prendiamo una funzione $f \in C^1(I)$ e un punto $x_0 \in I$: la retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è il polinomio di Taylor di primo grado della funzione e si può indicare $T_{1,x_0}(f)$ cioè polinomio di Taylor di grado 1 in x_0. La funzione può essere quindi approssimata in un intorno di x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Polinomi di Taylor

Prendiamo una funzione $f \in C^1(I)$ e un punto $x_0 \in I$: la retta tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è il polinomio di Taylor di primo grado della funzione e si può indicare $T_{1,x_0}(f)$ cioè polinomio di Taylor di grado 1 in x_0. La funzione può essere quindi approssimata in un intorno di x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

dove come sappiamo $o(x - x_0)$ rappresenta dei polinomi che tendono a 0 più velocemente di $x - x_0$ per $x \to x_0$.

Polinomi di Taylor

Ne risulta che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Polinomi di Taylor

Ne risulta che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

cioè $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ è un infinitesimo di grado superiore a 1. Proviamo a vedere se è un infinitesimo di grado 2, dividiamolo per $(x - x_0)^2$ e osserviamo che cosa otteniamo (occorre a questo punto aggiungere l'ulteriore ipotesi che $f(x)$ sia due volte derivabile, infatti):

Polinomi di Taylor

Ne risulta che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

cioè $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ è un infinitesimo di grado superiore a 1. Proviamo a vedere se è un infinitesimo di grado 2, dividiamolo per $(x - x_0)^2$ e osserviamo che cosa otteniamo (occorre a questo punto aggiungere l'ulteriore ipotesi che $f(x)$ sia due volte derivabile, infatti):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = (H) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Polinomi di Taylor

Se $f''(x_0) \neq 0$ i due infinitesimi hanno lo stesso ordine e possiamo scrivere una migliore approssimazione di $f(x)$ in x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Polinomi di Taylor

Se $f''(x_0) \neq 0$ i due infinitesimi hanno lo stesso ordine e possiamo scrivere una migliore approssimazione di $f(x)$ in x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Il polinomio di Taylor di secondo grado è quindi:

$$T_{2,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Polinomi di Taylor

Se $f''(x_0) \neq 0$ i due infinitesimi hanno lo stesso ordine e possiamo scrivere una migliore approssimazione di $f(x)$ in x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Il polinomio di Taylor di secondo grado è quindi:

$$T_{2,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

che rappresenta una parabola che approssima la curva $f(x)$ in un intorno di x_0.

Polinomi di Taylor

Se la funzione è n volte derivabile si può andare avanti iterando il ragionamento e trovando il polinomio di Taylor di grado n in x_0:

Polinomi di Taylor

Se la funzione è n volte derivabile si può andare avanti iterando il ragionamento e trovando il polinomio di Taylor di grado n in x_0:

$$T_{n,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Polinomi di Taylor

Se la funzione è n volte derivabile si può andare avanti iterando il ragionamento e trovando il polinomio di Taylor di grado n in x_0:

$$T_{n,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

dove k indica l'*ordine di derivazione* ed $f^{(0)}$ rappresenta quindi la funzione stessa.

Esempio

Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione $f(x) = e^{x^2}$ in $x_0 = 1$ è il seguente:

$$f(1) = e \quad f'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2e$$
$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} \Rightarrow f''(1) = 6e$$
$$T_{2,1}(e^{x^2}) = e + 2e(x-1) + 6e(x-1)^2$$

Resto di Peano

In generale una funzione si può scrivere in modo approssimato con il suo sviluppo di Taylor con **resto di Peano**:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

dove $o((x - x_0)^n)$ è il resto di Peano, un infinitesimo di grado superiore a n.

Polinomi di MacLaurin

In particolare, se lo sviluppo vene fatto nel punto $x_0 = 0$ si parla di **sviluppo di MacLaurin**: gli sviluppi di MacLaurin sono molto utili anche nella risoluzione delle forme indeterminate dei limiti (essi si trovano in quasi tutti i libri di analisi gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari e in **??** ne trovate alcuni). Data una funzione f, il suo sviluppo di Mac Laurin si può esprimere nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Esempi

Vediamo ad esempio lo sviluppo di e^x; essendo tutte le derivate uguali, se le calcoliamo in 0 viene sempre il valore 1, quindi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Esempi

Osserviamo ora come possiamo farci aiutare degli sviluppi delle funzioni per risolvere delle forme indeterminate:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

qui è stato usato lo sviluppo di $\sin x$ al terzo ordine.