Matematica generale CTF

L'integrale di Rieman

Dott. Alessandro Gambini

2 dicembre 2015

Somme di Darboux

Consideriamo con una funzione sempre positiva, limitata (non necessariamente continua) e definita su un intervallo: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e cerchiamo di calcolare l'area dell parte di piano compresa tra la funzione e l'asse x limitatamente all'intervallo $[a, b]$ suddividendo l'intervallo in n intervallini uguali di estremi x_i e x_{i+1}. Chiamiamo $x_0 = a$, $x_n = b$ e via via tutti gli altri x_i saranno compresi tra a e b.
Su ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ la funzione $f(x)$ ammette un estremo inferiore e un estremo superiore, che chiameremo:

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

Somme di Darboux

Possiamo approssimare l'area cercata per difetto con la somma dei rettangoli che hanno come base $x_{i+i} - x_i$ e come altezza m_i, oppure possiamo approssimarla per eccesso con la somma dei rettangoli che hanno come base $x_{i+i} - x_i$ e come altezza M_i; l'area A cercata sarà compresa tra questi due valori trovati:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_{i+i} - x_i) \leq A \leq \sum_{i=0}^{n} M_i(x_{i+i} - x_i) = S_n$$

Somme di Darboux

Chiamiamo l'approssimazione per difetto *somme inferiori* (o somme inferiori di Darboux) s_n e quella per eccesso *somme superiori* (o somme superiori di Darboux) S_n. Tale area può essere approssimata meglio se gli intervalli diventano sempre più piccoli e facendo quindi tendere n all'infinito. Rendendo più fine la partizione dell'intervallo le somme inferiori diventano sempre più grandi e viceversa le somme superiori diventano sempre più piccole, tendendo sempre più entrambe all'area reale.

Integrale di Riemann

Chiamiamo $\mathfrak{P}$ l'insieme di tutte le possibili partizioni p dell'intervallo $[a, b]$. Fra tutte le p, esisterà un estremo superiore per le somme inferiori e un estremo inferiore per le somme superiori:

$$s = \sup_{p \in \mathfrak{P}} s_n \qquad S = \sup_{p \in \mathfrak{P}} S_n$$

L'area cercata sarà sempre compresa tra $s \leq A \leq S$. Se $s = S$ allora anche $A = s = S$ e in questo caso si dice la funzione è **integrabile secondo Riemann** e si indica

$$A = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$$

Integrale di Riemann

Nota bene: l'equivalenza tra calcolo dell'area e il calcolo dell'integrale è dovuta al fatto di prendere in considerazione funzioni sempre positive. Con la definizione che abbiamo dato se la funzione fosse stata negativa per alcuni tratti avremmo trovato un'*area negativa*. L'integrale di Riemann misura quindi le aree **in senso algebrico** cioè considera negative le aree che stanno sotto l'asse x.
Per determinare l'area vera e propria, cioè sommando (e non sottraendo) anche le aree che si trovano sotto l'asse x, dovremmo ribaltare tutto ciò che sta sotto l'asse con una simmetria rispetto all'asse x. Per farlo utilizziamo pertanto la funzione valore assoluto e l'applichiamo alla nostra funzione:$|f(x)|$. L'area diventerà quindi:

$$A = \int_a^b |f|$$

Funzione di Dirichlet

E' molto *raro* trovare una funzione che non sia integrabile secondo Riemann, la maggior parte delle funzioni con cui abbiamo avuto a che fare sono sempre state funzioni integrabili. Uno dei pochi esempi noti è il seguente:

Funzione di Dirichlet

E' molto *raro* trovare una funzione che non sia integrabile secondo Riemann, la maggior parte delle funzioni con cui abbiamo avuto a che fare sono sempre state funzioni integrabili. Uno dei pochi esempi noti è il seguente: consideriamo la funzione di Dirichlet $\chi(x)$. Essa è definita da

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Funzione di Dirichlet

E' molto *raro* trovare una funzione che non sia integrabile secondo Riemann, la maggior parte delle funzioni con cui abbiamo avuto a che fare sono sempre state funzioni integrabili. Uno dei pochi esempi noti è il seguente: consideriamo la funzione di Dirichlet $\chi(x)$. Essa è definita da

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

E' una funzione impossibile da rappresentare graficamente. Le somme inferiori sono sempre uguali a -1 e le somme superiori sono sempre uguali a 1 perché per quanto sia fine la suddivisione in intervallini, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e quindi all'interno dell'intervallino ci sarà sempre sia un numero razionale che un numero irrazionale.

Continuità, monotonia e integrabilità

Se consideriamo un intervallo chiuso e una funzione limitata definita su tale intervallo ci accorgiamo altresì che la continuità è una condizione sufficiente ma non necessaria per l'integrabilità.

Continuità, monotonia e integrabilità

Se consideriamo un intervallo chiuso e una funzione limitata definita su tale intervallo ci accorgiamo altresì che la continuità è una condizione sufficiente ma non necessaria per l'integrabilità.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ allora

1. se f è limitata e continua tranne al più per un numero finito di punti allora è integrabile
2. se f è monotòna (anche con infinite discontinuità) allora è integrabile.

E' chiaro che non vale il viceversa, una funzione integrabile non è necessariamente né continua né monotòna.

Proprietà dell'integrale

Consideriamo una funzione integrabile $f[a,b] \to \mathbb{R}$ sull'intervallo $[a,b]$. La definizione di integrale di Riemann per tale funzione si può estendere con le seguenti convenzioni:

$$\int_a^a f = 0 \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f$$

cioè se integriamo su un insieme di misura nulla otteniamo un'area di misura nulla e se scambiamo gli estremi di integrazione e andiamo da destra verso sinistra le aree vengono considerate con segno negativo.

Proprietà dell'integrale

Linearità

Se f e g sono funzioni integrabili definite sull'intervallo $[a, b]$ e k, h sono due numeri reali allora $k \cdot f + h \cdot g$ è ancora una funzione integrabile e vale la seguente relazione:

$$\int_a^b (k \cdot f + h \cdot g) = k \int_a^b f + h \int_a^b g$$

Proprietà dell'integrale

Additività

In questo caso si parla di additività dell'integrale rispetto al dominio di definizione. Sia data $f : I \to \mathbb{R}$. Allora $\forall\, a, b, c \in I$ con $a < c < b$, vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

o equivalentemente,

$$\int_a^b f - \int_a^c f = \int_c^b f$$

Proprietà dell'integrale

Disuguaglianza triangolare

Ricordiamo che l'area che sottende il grafico di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è data da $\displaystyle\int_a^b |f|$. In generale una funzione $|f|$ può essere integrabile anche se f non lo è (si pensi alla funzione di Dirichlet), viceversa, se f è integrabile lo è anche $|f|$. Ed è proprio per le precedenti considerazioni che vale la seguente disuguaglianza:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Proprietà dell'integrale

Positività

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f \geq 0$.

Se invece f, oltre a essere sempre non negativa, è anche una funzione continua e $\int_a^b f = 0$ allora necessariamente $f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.

Proprietà dell'integrale

Monotonia

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora vale sempre

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Media integrale

Si definisce **media integrale** di una funzione f integrabile sull'intervallo $[a, b]$ il numero

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Media integrale

Si definisce **media integrale** di una funzione f integrabile sull'intervallo $[a, b]$ il numero

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Tale numero rappresenta l'altezza del rettangolo di base $b - a$ che ha area equivalente all'area compresa tra la curva e l'asse x per la funzione f.

Teorema della media integrale

Si può dimostrare che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Teorema della media integrale

Si può dimostrare che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Il teorema ci dice che esiste un punto dell'immagine di f, $f(c)$ corrispondente ad un punto $c \in [a, b]$, per cui l'area del rettangolo di base $b - a$ e altezza $f(c)$ è uguale all'area sottostante il grafico della funzione.

Teorema della media integrale

Dimostrazione

Osserviamo prima di tutto che, per il Teorema di Weierstrass, una funzione continua definita su un intervallo chiuso ammette sempre massimo e minimo assoluto. Se m e M sono rispettivamente minimo e massimo di f, $m \leq f(x) \leq M$. L'area compresa tra la curva e l'asse x sarà quindi compresa tra

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M$$

Poiché, per il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra m e M esisterà sicuramente un punto c tale che

$$f'(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Funzioni integrali

Supponiamo di avere sempre a che fare con una funzione f integrabile su un intervallo $[a, b]$ e di integrare tale funzione mantenendo fisso l'estremo a e facendo variare il secondo estremo t tra a e b. Otteniamo una funzione che calcola l'area sotto alla curva $y = f(x)$ al variare di t, se chiamiamo $F(t)$ tale funzione essa può essere descritta nel modo seguente[1]:

$$F(t) = \int_a^x f(x)dx$$

[1] Non è possibile utilizzare la stessa variabile sia per la funzione integranda che per la funzione integrale, per questo abbiamo fatto uso di una variabile ausiliaria.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il calcolo integrale non avrebbe avuto forse una importanza così rilevante se non fosse strettamente collegato alle primitive delle funzioni integrande. Il legame tra il calcolo integrale e le primitive delle funzioni è stato messo in evidenza con il cosiddetto teorema fondamentale del calcolo integrale, suddiviso in due parti, la prima detta anche di **Torricelli-Barrow**, la seconda detta anche formula di **Newton-Leibniz**.

Teorema di Torricelli-Barrow

Sia $f(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Allora: $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Teorema di Torricelli-Barrow

Dimostrazione

Per dimostrare questa prima parte si utilizza la definizione di derivata di $F(x)$ e il teorema della media integrale:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Teorema di Torricelli-Barrow

Dimostrazione

Per il teorema della media integrale, essendo f continua, esiste sempre un punto $c \in [x, x+h]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(c)$$

Quando $h \to 0$, essendo c compreso tra x e $x+h$, $c \to x$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{h \cdot f(c)}{h} = f(x)$$

Formula di Newton-Leibniz

Sia $f(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $P(x)$ una primitiva di $f(x)$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$$

Formula di Newton-Leibniz

Dimostrazione

Definiamo la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ e definiamo $D(x) = P(x) - F(x)$. Se deriviamo la funzione $D(x)$, otteniamo la funzione nulla perché la derivata di $F(x)$ per la prima parte del teorema vale $f(x)$ mentre la derivata di $P(x)$ è uguale a $f(x)$ per sua stessa definizione: $D'(x) = 0$. Pertanto $D(x) = k$ costante.
Essendo $D(x)$ una funzione costante, $D(a) = D(b) = k$.

$$D(b) = D(a) \;\Rightarrow\; P(b) - F(b) = P(a) - F(a)$$

ma $F(a) = 0$ per come è stata definita, quindi

$$P(b) - P(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dt$$

Formula di Newton-Leibniz

Una conseguenza di tale formula, combinata con le proprietà dell'integrale definito è la seguente: Date $a(x)$ e $b(x)$ funzioni derivabili,

$$\text{Se } F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

Tecniche di integrazione

Quando parliamo di tecniche di integrazione in realtà ci riferiamo a tecniche per trovare le primitive, o meglio, si tratta di tecniche volte a *semplificare* la ricerca delle primitive. A volte si usa il simbolo di integrale senza estremi di integrazione per indicare che si sta cercando una primitiva. L'uso di tale simbolo (integrale indefinito) non ha molto senso matematicamente perché un integrale non può essere definito senza estremi di integrazione. Molti libri di testo però lo utilizzano per indicare appunto che stiamo cercando una primitiva della funzione data.

$$\text{Se } F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int f(x)dx + C$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Tecniche di integrazione

Primitive immediate

In alcuni casi, partendo dalla derivata di funzione composte, si possono dedurre le primitive di alcune funzioni. Quelli che proponiamo sono pochi degli innumerevoli casi di derivazione di funzioni composte. Partendo ad esempio dalla funzione $\log(f(x))$ e derivando si ottiene:

$$D(\log(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(|f(x)|) + C$$

Tale formula permette di ricavare le primitive della funzione $tan(x)$:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -\log(|cosx|) + C$$

Tecniche di integrazione

Primitive immediate

Ecco alcuni altri casi:

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \qquad \forall n \neq -1$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \cos(f(x))f'(x)dx = \sin(f(x)) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \arctan(f(x)) + C$$

$$\ldots$$

Tecniche di integrazione

Integrazione per parti

Dalla formula per il calcolo della derivata del prodotto tra due funzioni si può ricavare la formula di integrazione per parti. Sia l'integrazione per parti che quella per sostituzione non *risolvono* l'integrale ma lo trasformano (in alcuni casi) in uno più semplice.

Tecniche di integrazione

Integrazione per parti

Dalla formula per il calcolo della derivata del prodotto tra due funzioni si può ricavare la formula di integrazione per parti. Sia l'integrazione per parti che quella per sostituzione non *risolvono* l'integrale ma lo trasformano (in alcuni casi) in uno più semplice.
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili su I, allora vale la seguente relazione:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Tecniche di integrazione

Integrazione per parti - dimostrazione

Dalla derivata del prodotto

$$D(f \cdot g) = f'g + fg'$$

integrando ambo i membri sull'intervallo $[a, b]$ si ricava:

$$[f \cdot g]_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

da cui segue la tesi.

Tecniche di integrazione

Integrazione per parti - esempio

La formula di integrazione per parti consente di trovare la primitiva di funzioni come $\log(x)$ e $\arctan(x)$:

$$\int \log(x)dx = \int 1 \cdot \log(x)dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} = x\log(x) - x + C$$

Tecniche di integrazione

Integrazione per sostituzione

La formula di integrazione per sostituzione si ricava dalla derivata delle funzioni composte.

Tecniche di integrazione

Integrazione per sostituzione

La formula di integrazione per sostituzione si ricava dalla derivata delle funzioni composte.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e $g(t)$ una funzione derivabile con gli estremi di integrazione a e b che appartengono all'immagine di g, allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

La dimostrazione segue direttamente dalla derivata delle funzioni composte.

Tecniche di integrazione

Integrazione per sostituzione - esempio

Un'integrale che richiede una sostituzione molto speciale è il seguente:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

Trattandosi di una semicirconferenza di raggio 1 con centro nell'origine il risultato dell'integrale deve essere $\frac{\pi}{2}$. E' difficile però arrivare a tale risultato senza effettuare una sostituzione (si potrebbe integrare per parti ma sarebbero richiesti molti calcoli).

Tecniche di integrazione

Integrazione per sostituzione - esempio

La sostituzione non banale è la seguente: $x = g(t) = \sin t$:

$$g(t) = \sin t \quad g'(t) = \cos t$$

$$g^{-1}(x) = \arcsin x \quad g^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \; g^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Primitive non elementari

Le primitive di molte funzioni non possono essere nemmeno espresse attraverso funzioni elementari.Un esempio classico è $f(x) = e^{-x^2}$ la **funzione gaussiana**. Non riusciremo mai a trovarne una primitiva in termini di funzioni elementari a meno che non usiamo la definizione stessa di primitiva come funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Tale primitiva è una primitiva della gaussiana che passa per l'origine.

Primitive non elementari

Questo non significa che la gaussiana non è integrabile, essendo una funzione continua lo è. Per trovare funzioni non integrabili siamo dovuti ricorre a definizioni tipo quella di Dirichlet. Il fatto di non riuscire a trovare una primitiva non significa che la funzione non sia integrabile, d'altra parte anche molte funzioni discontinue sono integrabili.
Ogni primitiva può essere espressa come funzione integrale, ad esempio, la primitiva di $f(x) = 2x$ passante per l'origine è $F(x) = x^2$. Essa può anche essere scritta nel modo seguente:

$$F(x) = x^2 = \int_0^x 2t\, dt$$

Integrali Impropri

Finora abbiamo considerato l'integrazione di funzioni continue o con discontinuità di salto in qualche punto e abbiamo visto che comunque esse sono integrabili. Ma cosa succede se una funzione tende all'**infinito** in un estremo dell'intervallo di definizione? E' possibile calcolare l'area di una regione illimitata? E se fosse possibile, l'area è sempre infinita? Si avrebbe lo stesso problema se l'intervallo di integrazione fosse infinito.
Si parla in questo caso di **integrali in senso generalizzato o integrali impropri**. Per capire meglio di cosa si tratta analizziamo la funzione:

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

prima nell'intervallo $]0,1[$ poi nell'intervallo $]1,+\infty[$

Integrali Impropri

Primo caso: intervallo finito con una discontinuità di infinito.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x \to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

L'integrazione ha senso per $\alpha \neq 1$, se $\alpha = 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_0^1$$

Se $\alpha < 1$ l'integrale è convergente, mentre in tutti gli altri casi l'integrale è divergente.

Integrali Impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

L'integrazione ha senso per $\alpha \neq 1$, se $\alpha = 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{+\infty}$$

Se $\alpha > 1$ l'integrale è convergente, mentre in tutti gli altri casi l'integrale è divergente. Quest'ultimo caso è analogo al caso della funzione armonica per le serie numeriche.

Integrali Impropri

Per quanto riguarda una qualsiasi funzione $f(x)$ si può capire la convergenza o la divergenza dell'integrale confrontandola con le funzioni armoniche appena citate. Vediamo un esempio: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$

Integrali Impropri

Per quanto riguarda una qualsiasi funzione $f(x)$ si può capire la convergenza o la divergenza dell'integrale confrontandola con le funzioni armoniche appena citate. Vediamo un esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

La funzione integranda non ha problemi di discontinuità né in $x = 0$ in cui vale 0, né in nessun altro punto della retta reale visto che il denominatore non si annulla mai. L'unico problema è la convergenza dell'integrale a $+\infty$:

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

L'integrale della funzione armonica $\dfrac{1}{x}$ non converge verso infinito perché $\alpha = 1$, pertanto l'integrale di partenza diverge.