

Principio di induzione, successioni

Esercizi da svolgere

1. Provare per induzione che $3^n > n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
2. Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$\begin{array}{lll} \bullet \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 + n + 1} & \bullet \frac{n \ln(n)}{(n+2)(n+3)} & \bullet \frac{(-1)^n}{n+7} \\ \bullet \frac{2^n(n+1)}{n!} & \bullet \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - n & \bullet \frac{\sqrt{2n^2 + 3}}{n+4} \end{array}$$

3. Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{an}$ al variare di a parametro reale non nullo.
4. Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n^2-1}{n}$ per $\forall n$, è monotona e illimitata. Determinare estremo superiore, estremo inferiore e eventuali massimi e minimi.
5. Determinare per quale parametro reale $p \in \mathbb{R}$ la seguente successione è convergente:

$$a_n = \frac{\cos(n) + \sqrt{n} + n^{2p+1}}{3\sqrt{n} - n^p}$$

6. Una popolazione di un predatore selvatico è a rischio di estinzione perché la mortalità supera la natalità e la popolazione si riduce del 5% annuo. Se si descrive l'evoluzione con un modello Malthusiano discreto e inizialmente si hanno 300 esemplari del predatore, in quanto tempo la popolazione si riduce a meno di 50 esemplari? Supponiamo di intervenire trasferendo da altre zone 10 esemplari l'anno (dopo la stagione riproduttiva). Come cambia l'evoluzione della popolazione? E se inizialmente la popolazione è di 80 individui?

Domande

1. Esiste una successione strettamente monotona e convergente con minimo uguale a 1 e massimo uguale a 3? In caso affermativo fornirne un esempio.
2. E' possibile definire in modo ricorsivo una successione che assume valore 0 per n pari e valore 1 per n dispari?
3. In quanti modi posso definire una successione i cui primi termini sono i seguenti: $\{1, 2, 4, \dots\}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$