

## Limiti, infinitesimi e continuità

### Esercizi da svolgere

1. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$
2. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{8x^2 - x - 1}}{2x}$
3. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1}$
4. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\tan(3x)}$
5. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$
6. Determinare l'espressione analitica di una funzione con 2 asintoti verticali in  $x = 0$  e  $x = -3$  e con un asintoto obliquo di pendenza 2.
7. Disegnare il grafico di una funzione  $f(x)$  dispari tale che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad f(3) = 1$$

e con un asintoto orizzontale di equazione  $y = -1$

8. Determinare per quale parametro reale  $p \in \mathbb{R}$  è possibile applicare il teorema degli zeri per la funzione  $f(x) = x^3 + px + 1$  sull'intervallo  $[-1, 1]$ .
9. Stabilire l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni per  $x \rightarrow 0$ , trovando un infinitesimo polinomiale equivalente del tipo  $kx^\alpha$

$$\tan(x) \quad \sqrt{1 - \cos x} \quad \sin(3x^4) \quad \ln(1 + 3x^2)$$

10. Determinare tutti gli asintoti della funzione  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} + \ln(x)$
11. Determinare per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - k^2 & x < 1 \\ k - e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

è continua

## Domande

1. Una funzione definita su  $[a, b]$  non continua può ammettere massimo e minimo assoluto?
2. Se  $f(x) = x^4 + 2x^2$  si può scrivere che  $f(x) = x^2 + o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ ? Perché?
3. Se  $f(x) = x^2 + o(x^2)$  e  $g(x) = 2x + o(x)$  per  $x \rightarrow 0$  come posso scrivere  $f + g$  e  $f \cdot g$ ?
4. Una funzione può intersecare un proprio asintoto obliquo?
5. Perché un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno una radice reale?
6. Se  $f(x) \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$  la funzione è necessariamente continua in 0? Perché?
7. Se  $f$  è una funzione definita per ogni valore reale e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  cosa posso dire di  $f(0)$ ?
8. Scrivere l'espressione analitica di una funzione infinitesima sia per  $x \rightarrow 0$ , che per  $x \rightarrow +\infty$  che per  $x \rightarrow 1$ .