

Limiti, infinitesimi e continuità

Esercizi da svolgere

1. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$
2. Calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{8x^2 - x - 1}}{2x}$
3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1}$
4. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\tan(3x)}$
5. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$
6. Determinare l'espressione analitica di una funzione con 2 asintoti verticali in $x = 0$ e $x = -3$ e con un asintoto obliquo di pendenza 2.
7. Disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ dispari tale che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad f(3) = 1$$

e con un asintoto orizzontale di equazione $y = -1$

8. Determinare per quale parametro reale $p \in \mathbb{R}$ è possibile applicare il teorema degli zeri per la funzione $f(x) = x^3 + px + 1$ sull'intervallo $[-1, 1]$.
9. Stabilire l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni per $x \rightarrow 0$, trovando un infinitesimo polinomiale equivalente del tipo kx^α

$$\tan(x) \quad \sqrt{1 - \cos x} \quad \sin(3x^4) \quad \ln(1 + 3x^2)$$

10. Determinare tutti gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} + \ln(x)$
11. Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - k^2 & x < 1 \\ k - e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

è continua

Domande

1. Una funzione definita su $[a, b]$ non continua può ammettere massimo e minimo assoluto?
2. Se $f(x) = x^4 + 2x^2$ si può scrivere che $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$? Perché?
3. Se $f(x) = x^2 + o(x^2)$ e $g(x) = 2x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ come posso scrivere $f + g$ e $f \cdot g$?
4. Una funzione può intersecare un proprio asintoto obliquo?
5. Perché un polinomio di grado dispari ammette sempre almeno una radice reale?
6. Se $f(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$ la funzione è necessariamente continua in 0? Perché?
7. Se f è una funzione definita per ogni valore reale e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ cosa posso dire di $f(0)$?
8. Scrivere l'espressione analitica di una funzione infinitesima sia per $x \rightarrow 0$, che per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow 1$.