Calcolo differenziale

Esercizi da svolgere

1. Sia $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{se } x < 0 \\ e^{bx} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ Determinare i valori di a, b reali per cui $f(x)$ è continua e derivabile

2. Determinare i valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x) = \log(x) + k$ ha come retta tangente $y = ex$

3. Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione $f(x) = e^{-x^2}$

4. Sia $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + k$; determinare il numero di radici del polinomio al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare massimo e minimo assoluto di $f(x)$ per $k = 0$ nell'intervallo $[-3, 3]$

5. Stabilire il numero di punti critici della funzione $f(x) = e^x + 2x + x^2$. E' possibile stabilirne la natura (massimi, minimi o flessi orizzontali)?

6. Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(-x, \arctan(x))$ e dimostrare che 0 è un punto di non derivabilità.

7. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ definita su tutto $\mathbb{R}$

   - Se ne determinino eventuali asintoti
   - Studiare gli intervalli di monotonìa e convessità, gli eventuali massimi e minimi locali e i flessi.
   - Determinare l'immagine della funzione e disegnarne un grafico qualitativo
   - Partendo dal grafico della funzione disegnare un grafico qualitativo della sua primitiva che passa per l'origine.
   - Individuare il più ampio intervallo in cui la funzione è invertibile che contenga il punto di flesso.
   - Calcolare la derivata della funzione inversa nel punto di flesso.

8. Si dispone di 800 metri di materiale per recintare un campo di forma rettangolare. Su un lato del campo c'è un edificio, per cui quel lato non è da recintare.

   - Determinare la funzione che descrive l'area del campo racchiusa dal recinto, in funzione di una delle dimensioni del rettangolo
   - Scrivere esplicitamente l'intervallo in cui varia la variabile scelta
   - Esiste sicuramente un valore della variabile per cui questa funzione ha un massimo. Perché? Quale teorema permette di affermarlo?
   - Quale è questo valore? Per questo valore, quale è l'area del campo?

9. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \ln(1+x) - x}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{\frac{x^6}{6} - \tan^7(x)}$$

Domande

1. Determinare i valori dei punti che verificano il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[0, 3]$. E' possibile applicare il teorema di Rolle nello stesso intervallo?
2. E' possibile definire una funzione sempre monotòna crescente e sempre concava con un asintoto orizzontale?
3. E' possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x) = x^2 - |x|$ sull'intervallo $[0, 1]$? Partendo dal grafico di $x^2 - x$ disegnare il grafico di $x^2 - |x|$
4. Sia $f(x)$ una funzione derivabile, strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, con un unico punto di flesso in $x = 0$ e con due asintoti orizzontali. Cosa rappresenta il punto di flesso per $f'(x)$? Disegnare un grafico qualitativo per $f(x)$ e $f'(x)$.
5. Un punto che annulla la derivata seconda di una funzione 2 volte derivabile è necessariamente un flesso? Perché?
6. Come si possono semplificare le seguenti espressioni $x + o(x^2) + o(2x)$, $x \cdot o(x) + o(x^3)$, $o(x^3) - o(x^3)$, $(x - x^2 + o(x^2))^2$?
7. Cosa rappresenta $o(1)$?
8. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e monotòna decrescente chi sono massimo e minimo assoluto?
9. Se una funzione è continua e derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$ ed è sempre strettamente convessa, quanti punti di minimo locale può avere? Può avere un minimo assoluto?