Calcolo integrale

1. Provare che $f(x) = \log(7x) + 1$ e $g(x) = \log(x^2) - \log(x)$ sono primitive delle stesse funzioni. Determinare la costante per cui differiscono.

2. Calcolare l'area della parte di piano compresa $f(x) = |x| - x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$

3. Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\int_1^x \sin(t^2)dt}{3x^3}$

4. Calcolare i seguenti integrali definiti:

   - $\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+1}dx$
   - $\int_0^1 x^2 \cos x dx$
   - $\int_0^1 \frac{6}{x^2-9}dx$
   - $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\log x}}dx$
   - $\int_0^\pi e^x \sin x + x dx$
   - $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$
   - $\int_{-1}^0 x^2 e^{x^3} dx$
   - $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3}dx$
   - $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$

5. Stabilire la convergenza del seguente integrale: $\int_1^{+\infty} \frac{t+2}{t^2\sqrt{t-1}}$

6. Determinare per quali $p \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente: $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p+1}+1}{t^2+1}$

7. Disegnare un grafico qualitativo della funzione, calcolando monotonia e concavità di $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt$.

8. Calcolare la media integrale μ di $f(x) = \max\{|x|, x^2\}$ sull'intervallo $[0, 2]$ e individuare un valore di c per cui $\mu = f(c)$. Perché tale valore è unico?

9. Trovare la primitiva della funzione $f(x) = x\sin(x^2)$ che si annulla in $x = \sqrt{\pi}$.

10. Data la funzione $f(x)$ in figura (pag 3) disegnare un grafico qualitativo di $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$

11. *(Es. 9.16 del libro, Il peso dell'aria)* Con buona approssimazione si può assumere che la densità dell'aria vari con la quota sul livello del mare con la legge $\rho(h) = 1.2e^{-0.12\,h}$, dove h è misurato in chilometri e $\rho(h)$ in chilogrammi al metro cubo. Supponendo che questa legge sia valida anche in alta quota (dove in realtà la densità è molto variabile), determinare la massa complessiva della colonna d'aria che ha un metro quadro di area di base. Inoltre determinare per quale valore di h la massa della colonna d'aria è il 99% del totale.

Domande

1. La derivata di una funzione pari è sempre una funzione dispari e viceversa (provate a dimostrarlo!). Quindi le primitive di funzioni pari sono sempre funzioni dispari?

2. Se $f''(x) = e^x$ come risulta in generale $f(x)$?

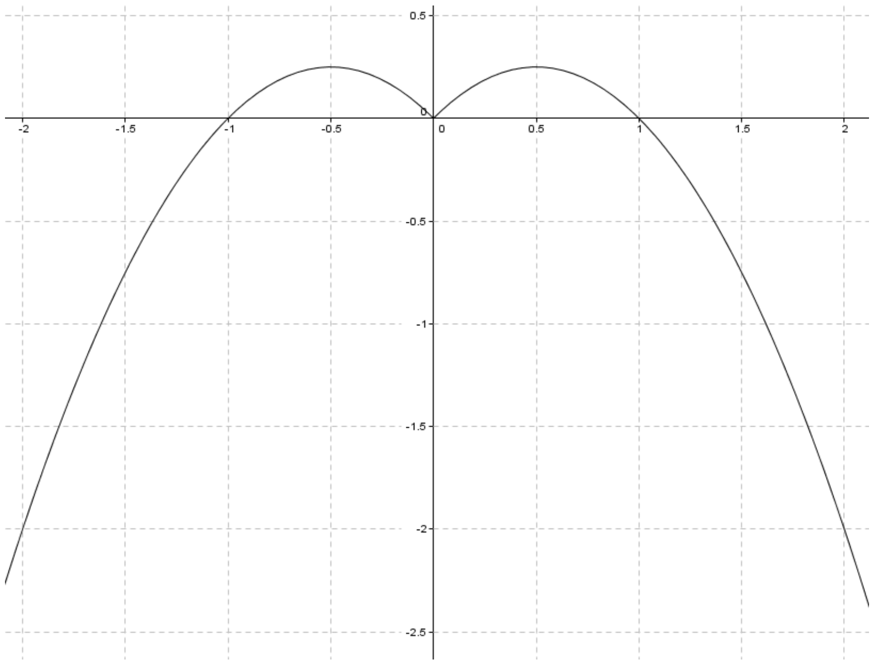
3. Se $w(t)$ è il tasso di crescita di un bambino in etti all'anno, cosa rappresenta $\int_2^5 w(t)dt$? E $\int_0^x w(t)dt$?

4. Se $f(x)$ è una funzione pari in quale altro modo posso scrivere $\int_{-a}^{a} f(x)dx$?

5. E' possibile calcolare $\int_0^1 x^2dx$ utilizzando la definizione di integrale (somma di infiniti rettangoli di base infinitesima)?

6. E' maggiore la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ o $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$? Perché?

7. Se $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ con $F(x)$ derivabile ha un asintoto orizzontale per $x \to \infty$, quanto vale $\lim_{x\to\infty} f(x)$?



0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5