Matematica generale CTF

Equazioni differenziali

Dott. Alessandro Gambini

9 dicembre 2015

Equazioni differenziali ordinarie

Si chiamano equazioni differenziali quelle equazioni le cui incognite non sono variabili reali ma funzioni di una o più variabili. Le equazioni differenziali possono coinvolgere le derivate di qualsiasi ordine delle funzioni incognite ma , nel caso di funzioni di una sola variabile indipendente si parla di **equazioni differenziali ordinarie** il cui **ordine** è il grado della derivata più alta presente nell'equazione. Per casi di funzioni di più variabili indipendenti si parla di equazioni alle derivate parziali che però non tratteremo in questi appunti. Le sole equazioni che tratteremo sono solo alcuni tipi di equazioni differenziali del primo ordine che quindi coinvolgono solo la derivata prima della funzione incognita oltre alla funzione stessa.

Equazioni differenziali ordinarie

La notazione che utilizzeremo per le equazioni differenziali è la seguente: di solito indichiamo con $y(x)$ la funzione incognita, x la sua variabile e $y'(x)$ la sua derivata prima. In generale risolveremo alcune equazioni differenziali della forma

$$y' = f(x, y)$$

in cui è stato omessa la dipendenza della funzione y dalla variabile x: si tratta di una abbreviazione della equazione $y'(x) = f(x, y(x))$.
In alcuni casi, soprattutto nei sistemi fisici, molte funzioni dipendono dal tempo, ad esempio $y(t)$ o $x(t)$: in questo caso le derivate si indicano con uno o più punto sopra la funzione piuttosto che con un apice ma il succo non cambia:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

Problema di Cauchy

In generale la soluzione di una equazione differenziale non è unica, si pensi alla semplice equazione $y' = y$. Chiaramente $y(x) = e^x$ è soluzione di tale equazione ma se ci pensate anche tutte le funzioni del tipo $y(x) = ce^x$ sono soluzioni compresa la soluzione nulla $y(x) = 0$. Ciò è causato chiaramente dal fatto che la primitiva di una funzione non è unica se non imponiamo delle condizioni iniziali; cos'è che quindi rende unica la soluzione di una equazione differenziale?
Se imponiamo la condizione $y(0) = 1$ l'unica soluzione dell'equazione precedente è chiaramente $y(x) = e^x$; se imponiamo che $y(0) = 0$ l'unica soluzione sarà quella nulla. In tal caso si dice che poniamo un **Problema di Cauchy** (PC), cioè una equazione differenziale con condizione iniziale.

Problema di Cauchy

Unicità della soluzione

La condizione iniziale **non** è sufficiente a garantire l'unicità della soluzione:

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

in cui una delle soluzioni è sicuramente $y(x) = 0$ ma anche la funzione $y(x) = x^3$ è soluzione.
Come possiamo quindi rendere unica la soluzione del PC? Il teorema che assicura l'esistenza di una e una sola soluzione del PC è il *Teorema di Cauchy-Lipschitz* che non tratteremo ma ne fornire mo solo la seguente versione ridondante:

Problema di Cauchy

Unicità della soluzione

Consideriamo il Problema Di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se la funzione (di due variabili) $f(x, y)$ è continua se consideriamo x come variabile e y come costante e possiede derivata parziale continua rispetto a y, cioè se derivando rispetto a y (considerando x costante) otteniamo una funzione continua, allora esiste un'unica soluzione del Problema di Cauchy in un intorno del punto x_0, y_0 e quindi un'unica soluzione **locale**.

Problema di Cauchy

In effetti nell'esempio che abbiamo riportato con più di una soluzione $2\sqrt{|y|}$ non aveva derivata continua in $(0,0)$ e di fatto la soluzione non era unica. Ciò non significa che tutte le equazioni con derivate parziali non continue abbiano necessariamente infinite soluzione, però siamo sicuri che se le derivate parziali sono continue la soluzione è localmente unica.
L'unicità è in ogni caso assicurata in un intorno del PC, perché è difficile stabilire il dominio della soluzione dell'equazione differenziale e la **prolungabilità** della stessa.

Codominio, dominio e di prolungabilità della soluzione

Non analizzeremo nel dettaglio il dominio della soluzione di una equazione differenziale né del prolungamento della stessa l di fuori dell'intorno che contiene il punto del Problema di Cauchy. In ogni caso cerchiamo di capire con un paio di esempi come si comportano le soluzioni dei PC:

$$\begin{cases} y'(x) = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non ha problemi di dominio nè per la variabile x, nè per la y però la soluzione è $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$ che è non definita in $x = 1$, il suo dominio sarebbe $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$: poiché il punto del PC, $(0, 1)$, appartiene al primo dei due sottointervalli possiamo prolungare la soluzione solo su tutto il primo dei due sottointervalli e quindi $Dom(y) =]-\infty, 1[$.

Codominio, dominio e di prolungabilità della soluzione

Il codominio della soluzione in questo caso si può evincere dall'equazione differenziale: notiamo che la soluzione non può passare per l'asse x ($y = 0$) perché se passasse per l'asse x esisterebbe un punto per cui $y(x_0) = 0$. In tale punto la derivata prima sarebbe nulla (dall'equazione differenziale y^2 si annulla per $y = 0$) e quindi la soluzione dovrebbe essere costante e uguale a 0 (MA $y(0) = 1$) e ciò è una contraddizione! Questo sarebbe vero solo se il problema di Cauchy fosse $y(x_0) = 0$ ma in questo caso l'unica soluzione sarebbe quella nulla.

Necessariamente la soluzione non passa per 0 e quindi deve trovarsi sempre sopra o sempre sotto l'asse x, in questo caso si trova sempre sopra perché $y(0) = 1$ è un punto in cui sta sopra l'asse x. Questo significa che il $Cod(y)$ è un sottoinsieme di $]0, +\infty[$ o è esattamente $]0, +\infty[$.

Codominio, dominio e di prolungabilità della soluzione

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non avrà una soluzione definita per $x = 0$ (la funzione $\dfrac{y-1}{x}$ è discontinua in $x = 0$ e non verifica le ipotesi del Teorema di unicità. D'altra parte l'unica soluzione del problema è $y(x) = 1 - x$ che sarebbe definita su tutto $\mathbb{R}$ ma se consideriamo che il codominio di y deve essere un sottoinsieme di $]-\infty, 1[$ (dopo aver osservato che $y - 1$ si annulla in 1 e che la soluzione deve passare per $(0, 1)$) non è possibile prolungare il dominio della soluzione oltre $x = 0$ e quindi il dominio massimale sarà $]-\infty, 0[$.

Equazioni a variabili separabili

Vediamo ora come risolvere alcuni tipi di equazioni differenziali partendo dai casi più semplici in cui si possono *separare le variabili*, ovvero l'equazione differenziale è della forma:

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

in cui, nei valori per cui $b(y) \neq 0$, si può scrivere $\dfrac{y'}{b(y)} = a(x)$. Ad esempio l'equazione $y' = x^2(y^2 + 1)$ è a variabili separabili mentre per l'equazione $y' = \dfrac{y + x}{y^2 - x}$ non c'è modo di separare le variabili con semplici passaggi algebrici.

Equazioni a variabili separabili

I problemi di Cauchy a variabili separabili si risolvono, dopo aver separato le variabili, integrando ambo i membri e infine ricavando, se possibile, una espressione esplicita per la $y(x)$:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot b(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{b(t)} = \int_{x_0}^{x} a(s)ds$$

Equazioni a variabili separabili

Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(1+y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x 2sds$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(y) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \tan(x^2)$$

Non è sempre possibile ricavare esplicitamente una espressione per $y(x)$ ma l'esistenza e l'unicità della soluzione è assicurata sempre se vengono rispettate le condizioni del Teorema di unicità.

Equazioni differenziali lineari

Per equazioni differenziali lineari si intendono le equazioni differenziali lineari rispetto alla $y(x)$, cioè $y(x)$ deve comparire nell'equazione differenziale come polinomio al più di grado 1, sono cioè della forma:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

$y' = x^2 y + \log(x)$ è lineare non a variabili separabili; $y' = yx + x$ è sia lineare che a variabili separabili; $y' = y^2 e^x + 1$ non è né lineare né a variabili separabili.
Le equazioni lineari godono di un indiscutibile vantaggio: se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ anche la soluzione dell'equazione differenziale è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Equazioni differenziali lineari

La soluzione di un PC lineare è data dalla seguente formula (che non dimostreremo in questi appunti):

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt \right)$$

Equazioni differenziali lineari

Esempio

$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{1+x^2} y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si applica la formula:

$$y = e^{\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt} \left(0 + \int_0^x 1 \cdot e^{-\int_0^t \frac{2s}{1+s^2} ds} dt \right) = e^{\log(1+x^2)} \left(\int_0^x e^{-\log(1+t^2)} dt \right) =$$

$$= (1+x^2) \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = (1+x^2) \arctan(x)$$