Matematica generale CTF

Le funzioni continue

Dott. Alessandro Gambini

28 novembre 2016

Topologia della retta reale

Intorni

Un **intorno** di un punto x_0 è un intervallo della retta reale centrato del punto x_0 di *raggio* r del tipo

$$]x_0 - r, x_0 + r[$$

Topologia della retta reale

Intorni

Un **intorno** di un punto x_0 è un intervallo della retta reale centrato del punto x_0 di *raggio* r del tipo

$$]x_0 - r, x_0 + r[$$

Si parla di intorno sinistro se x_0 è l'estremo destro dell'intorno, $]x_0 - r, x_0]$ e di intorno destro se x_0 è l'estremo sinistro dell'intorno $[x_0, x_0 + r[$.

Topologia della retta reale

Intorni

Ad esempio:

Topologia della retta reale

Intorni

Ad esempio:

- $]1, 3[$ è un intorno del punto 2 di raggio 1

Topologia della retta reale

Intorni

Ad esempio:

- $]1,3[$ è un intorno del punto 2 di raggio 1
- $[2,3[$ è un intorno destro del punto 2

Topologia della retta reale

Intorni

Ad esempio:

- $]1,3[$ è un intorno del punto 2 di raggio 1
- $[2,3[$ è un intorno destro del punto 2
- $]1,2]$ è un intorno sinistro del punto 2

Topologia della retta reale

Intorni

Un **intorno di** $+\infty$ è un intervallo illimitato superiormente del tipo: $]k, +\infty[$ con $k \in \mathbb{R}$. Analogamente un **intorno di** $-\infty$ è un intervallo illimitato inferiormente del tipo: $]-\infty, k[$, $k \in \mathbb{R}$.

Topologia della retta reale

Punti interni, esterni e frontiera

Un punto x_0 si dice **interno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A.

Topologia della retta reale

Punti interni, esterni e frontiera

Un punto x_0 si dice **interno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A.
Un punto x_0 si dice **esterno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A^C (complementare di A).

Topologia della retta reale

Punti interni, esterni e frontiera

Un punto x_0 si dice **interno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A.
Un punto x_0 si dice **esterno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A^C (complementare di A).
Un punto x_0 si dice **di frontiera** rispetto ad un insieme A se non è nè interno nè esterno.

Topologia della retta reale

Punti interni, esterni e frontiera

Un punto x_0 si dice **interno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A.
Un punto x_0 si dice **esterno** a un sottoisieme A di $\mathbb{R}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in A^C (complementare di A).
Un punto x_0 si dice **di frontiera** rispetto ad un insieme A se non è nè interno nè esterno.
Ad esempio se $A =]0,1]$ tutti i punti $]0,1[$ sono punti interni, i punti 0 e 1 sono punti di frontiera e l'insieme $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ è l'insieme dei punti esterni.

Topologia della retta reale

Aperti e chiusi

Un insieme A si dice **aperto** se ogni elemento di A è interno ad A. Dato A^C l'insieme complementare di A, l'insieme A si dice **chiuso** se A^C è aperto.

Topologia della retta reale

Aperti e chiusi

Un insieme A si dice **aperto** se ogni elemento di A è interno ad A. Dato A^C l'insieme complementare di A, l'insieme A si dice **chiuso** se A^C è aperto.

Esempi:

- L'insieme $A = [0, 1]$ è chiuso e $A^C =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ è aperto (l'insieme unione di insiemi aperti è aperto).

Topologia della retta reale

Aperti e chiusi

Un insieme A si dice **aperto** se ogni elemento di A è interno ad A. Dato A^C l'insieme complementare di A, l'insieme A si dice **chiuso** se A^C è aperto.
Esempi:

- L'insieme $A = [0, 1]$ è chiuso e $A^C =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ è aperto (l'insieme unione di insiemi aperti è aperto).
- L'insieme $B =]0, 1[$ è aperto e $]0, 1]$ non è nè aperto nè chiuso.

Topologia della retta reale

Aperti e chiusi

Un insieme A si dice **aperto** se ogni elemento di A è interno ad A. Dato A^C l'insieme complementare di A, l'insieme A si dice **chiuso** se A^C è aperto.

Esempi:

- L'insieme $A = [0, 1]$ è chiuso e $A^C =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ è aperto (l'insieme unione di insiemi aperti è aperto).
- L'insieme $B =]0, 1[$ è aperto e $]0, 1]$ non è nè aperto nè chiuso.
- L'insieme $\mathbb{N}$ è chiuso e $\mathbb{N}^{\mathbb{C}}$ è aperto.

Topologia della retta reale

Aperti e chiusi

Un insieme A si dice **aperto** se ogni elemento di A è interno ad A. Dato A^C l'insieme complementare di A, l'insieme A si dice **chiuso** se A^C è aperto.

Esempi:

- L'insieme $A = [0,1]$ è chiuso e $A^C =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ è aperto (l'insieme unione di insiemi aperti è aperto).
- L'insieme $B =]0,1[$ è aperto e $]0,1]$ non è nè aperto nè chiuso.
- L'insieme $\mathbb{N}$ è chiuso e $\mathbb{N}^{\mathbb{C}}$ è aperto.

Con queste nuove definizioni possiamo definire un **intorno completo** di un punto x_0 come un intervallo aperto contenente x_0. Dalla definizione ne deduciamo che intorni destri e sinistri *non* sono intorni completi.

Topologia della retta reale

Punti di accumulazione e derivato

Sia A un sottoinsieme della retta reale, x_0 si dice **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A diverso da x_0 stesso. L'insieme dei punti di accumulazione si chiama **derivato** di A. Un punto è **isolato** se non è di accumulazione.

Topologia della retta reale

Punti di accumulazione e derivato

Sia A un sottoinsieme della retta reale, x_0 si dice **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A diverso da x_0 stesso. L'insieme dei punti di accumulazione si chiama **derivato** di A. Un punto è **isolato** se non è di accumulazione. Esempi:

- In $]0,1[$ tutti i punti sono punti di accumulazione e lo sono anche 0 e 1 (pur non appartenendo all'intervallo) in quanto qualunque intorno di essi (cioè qualsiasi intervallo della retta reale centrato in 0 o 1) contiene almeno un altro elemento di $]0,1[$.

Topologia della retta reale

Punti di accumulazione e derivato

Sia A un sottoinsieme della retta reale, x_0 si dice **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A diverso da x_0 stesso. L'insieme dei punti di accumulazione si chiama **derivato** di A. Un punto è **isolato** se non è di accumulazione. Esempi:

- In $]0,1[$ tutti i punti sono punti di accumulazione e lo sono anche 0 e 1 (pur non appartenendo all'intervallo) in quanto qualunque intorno di essi (cioè qualsiasi intervallo della retta reale centrato in 0 o 1) contiene almeno un altro elemento di $]0,1[$.
- Dato $A =]0,1]$, il *Derivato di A* è l'insieme $[0,1]$.

Topologia della retta reale

Punti di accumulazione e derivato

Se invece consideriamo $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ possiamo dire che A è fatto solo di punti isolati, tranne al più 0 che diventa un punto di accumulazione (sebbene non appartenga ad A) perché ogni intorno per quanto piccolo di 0 contiene almeno un elemento di A.

Trasformazioni del piano

Per trasformazioni lineari intendiamo le traslazioni, le dilatazioni (o contrazioni) e le riflessioni della funzione sia rispetto alla variabile dipendente che rispetto a quella indipendente.

Trasformazioni del piano

Per trasformazioni lineari intendiamo le traslazioni, le dilatazioni (o contrazioni) e le riflessioni della funzione sia rispetto alla variabile dipendente che rispetto a quella indipendente.
In dettaglio, si parla di trasformazioni nella variabile dipendente se operiamo sulla variabile $y = f(x)$ e di trasformazioni nella variabile indipendente se operiamo sulla x. Nel primo caso si tratta di trasformazioni "verticali" e il dominio della funzione rimane invariato; nel secondo caso, trasformazioni "orizzontali", spesso il dominio cambia (e, nel caso di funzioni periodiche, varia anche il periodo).

Trasformazioni del piano

Traslazioni

Per traslare una funzione verticalmente si aggiunge una costante $k \in \mathbb{R}$ alla variabile dipendente: $f(x) + k$. Se $k > 0$ la traslazione è verso l'alto, se $k < 0$ la traslazione è verso il basso.

Trasformazioni del piano

Traslazioni

Per traslare una funzione verticalmente si aggiunge una costante $k \in \mathbb{R}$ alla variabile dipendente: $f(x) + k$. Se $k > 0$ la traslazione è verso l'alto, se $k < 0$ la traslazione è verso il basso.
Per traslare una funzione orizzontalmente si aggiunge una costante $k \in \mathbb{R}$ alla variabile indipendente: $f(x + k)$. Se $k > 0$ la traslazione è verso sinistra, se $k < 0$ la traslazione è verso destra.

Trasformazioni del piano

Dilatazioni (e contrazioni)

Se moltiplichiamo per $k > 0$ una funzione, $k \cdot f(x)$ otteniamo una dilatazione verticale se $k > 1$ e una contrazione verticale se $0 < k < 1$.

Trasformazioni del piano

Dilatazioni (e contrazioni)

Se moltiplichiamo per $k > 0$ una funzione, $k \cdot f(x)$ otteniamo una dilatazione verticale se $k > 1$ e una contrazione verticale se $0 < k < 1$.
Se moltiplichiamo per $k > 0$ la variabile indipendente di una funzione, $f(k \cdot x)$ otteniamo una dilatazione orizzontale se $0 < k < 1$ e una contrazione orizzontale se $k > 1$.

Trasformazioni del piano

Riflessioni

Se cambiamo il segno a tutta la funzione, $-f(x)$, otteniamo una riflessione verticale (rispetto all'asse x)..

Trasformazioni del piano

Riflessioni

Se cambiamo il segno a tutta la funzione, $-f(x)$, otteniamo una riflessione verticale (rispetto all'asse x)..

Se cambiamo il segno alla variabile indipendente, $f(-x)$, otteniamo una riflessione orizzontale (rispetto all'asse y).

Trasformazioni del piano

Riflessioni

Casi di riflessioni sono le trasformazioni che utilizzano il valore assoluto della variabile x o della variabile y: solo una parte del grafico viene riflessa.

Trasformazioni del piano

Riflessioni

Casi di riflessioni sono le trasformazioni che utilizzano il valore assoluto della variabile x o della variabile y: solo una parte del grafico viene riflessa. $|f(x)|$ è una funzione sempre positiva che lascia invariata la parte positiva di $f(x)$ e riflette rispetto all'asse x la parte negativa del grafico di $f(x)$.

Trasformazioni del piano

Riflessioni

Casi di riflessioni sono le trasformazioni che utilizzano il valore assoluto della variabile x o della variabile y: solo una parte del grafico viene riflessa.
$|f(x)|$ è una funzione sempre positiva che lascia invariata la parte positiva di $f(x)$ e riflette rispetto all'asse x la parte negativa del grafico di $f(x)$.
$f(|x|)$ è una funzione pari che lascia invariata la parte del grafico per $x \geq 0$ e riflette specularmente rispetto all'asse y quella stessa parte di grafico sul secondo e quarto quadrante del piano cartesiano.

Trasformazioni del piano

Riflessioni

Casi di riflessioni sono le trasformazioni che utilizzano il valore assoluto della variabile x o della variabile y: solo una parte del grafico viene riflessa.
$|f(x)|$ è una funzione sempre positiva che lascia invariata la parte positiva di $f(x)$ e riflette rispetto all'asse x la parte negativa del grafico di $f(x)$.
$f(|x|)$ è una funzione pari che lascia invariata la parte del grafico per $x \geq 0$ e riflette specularmente rispetto all'asse y quella stessa parte di grafico sul secondo e quarto quadrante del piano cartesiano.
Anche il grafico dell'inversa di una funzione può essere definito tramite una riflessione. In questo caso la riflessione avviene rispetto alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante che ha equazione $y = x$.

Composizione di funzioni

Tutte le trasformazioni del piano sono composizioni di funzioni con funzioni polinomiali di primo grado (o al più con la funzione valore assoluto). Ad esempio se $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x - 1$, componendo le due funzioni, possiamo ottenere:

Composizione di funzioni

Tutte le trasformazioni del piano sono composizioni di funzioni con funzioni polinomiali di primo grado (o al più con la funzione valore assoluto). Ad esempio se $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x - 1$, componendo le due funzioni, possiamo ottenere:
$f(g(x)) = e^{2x-1}$ una contrazione e una traslazione orizzontale;

Composizione di funzioni

Tutte le trasformazioni del piano sono composizioni di funzioni con funzioni polinomiali di primo grado (o al più con la funzione valore assoluto). Ad esempio se $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x - 1$, componendo le due funzioni, possiamo ottenere:
$f(g(x)) = e^{2x-1}$ una contrazione e una traslazione orizzontale;
$g(f(x)) = 2e^x - 1$ una dilatazione e una traslazione verticale.

Composizione di funzioni

La composizione tra funzioni **non è commutativa** (se si cambia l'ordine con il quale componiamo le due funzioni, cambia la composizione) e comporre una qualsiasi funzione con $f(x) = x$ lascia sempre invariata la funzione di partenza; infatti, la funzione identità $f(x) = x$ è **l'elemento neutro** della composizione tra funzioni. In tutti gli altri casi non è semplice graficare una funzione composta e per farlo abbiamo bisogno di tecniche più sofisticate di calcolo differenziale. E' possibile però definire algebricamente la composizione tra due o più funzioni.

Composizione di funzioni

Esempi

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sin(x) \qquad h(x) = 3$$

Provate a scrivere analiticamente le seguenti funzioni composte:

$$f(g(x)),\ g(f(x)),\ f(h(x)),\ h(f(x)),\ g(g(x)),\ f(g(f(x)))$$

Definizione di limite

Cerchiamo di definire il concetto di limite per $x \to x_0$ di una funzione $f(x)$ con x_0 punto di accumulazione del dominio di f, partendo da un esempio concreto:

Definizione di limite

Cerchiamo di definire il concetto di limite per $x \to x_0$ di una funzione $f(x)$ con x_0 punto di accumulazione del dominio di f, partendo da un esempio concreto:

Sia $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}$ il cui dominio è $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. E' chiaro che se $x \neq 1$ possiamo semplificare la frazione e ottenere $f(x) = x - 1$ però rimane il fatto che la funzione in 1 non è definita e $f(1)$ **non** esiste. Ha senso però vedere quello che succede *avvicinandosi* arbitrariamente al punto 1, sia avvicinandosi da sinistra (per valori di x *un po' più piccoli* di 1) che da destra (per valori di x *un po' più grandi* di 1). Avvicinandoci a 1, sia da destra che da sinistra, il valore della funzione tende a 0 (cioè man mano che ci avviciniamo, la funzione assume valori sempre più prossimi a 0).

Definizione di limite

Questo lo possiamo scrivere in termini di limite nel modo seguente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

Definizione di limite

Questo lo possiamo scrivere in termini di limite nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \ ; \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$$

dove con 1^- indichiamo un *avvicinamento da sinistra*, **limite sinistro** e con 1^+ un *avvicinamento da destra*, **limite destro**.

Definizione di limite

Questo lo possiamo scrivere in termini di limite nel modo seguente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

dove con 1^- indichiamo un *avvicinamento da sinistra*, **limite sinistro** e con 1^+ un *avvicinamento da destra*, **limite destro**.
In questo caso limite destro e limite sinistro sono uguali. In generale, se limite destro e sinistro sono equivalenti, possiamo dire che esiste il limite per $x \to 1$ di $f(x)$, ed è uguale al valore a cui tende la funzione sia da destra che da sinistra (in questo caso, il limite è $= 0$).

Definizione di limite

Consideriamo un secondo esempio, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ in cui il dominio è tutto $\mathbb{R}$ tranne il punto 0 ($D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$). Cerchiamo di capire l'andamento della funzione per valori di x che si avvicinano a 0.

Definizione di limite

Consideriamo un secondo esempio, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ in cui il dominio è tutto $\mathbb{R}$ tranne il punto 0 ($D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$). Cerchiamo di capire l'andamento della funzione per valori di x che si avvicinano a 0. In questo caso il limite destro e il limite sinistro non coincidono, infatti:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

quindi in questo caso il limite non esiste.

Definizione di limite

Consideriamo un secondo esempio, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ in cui il dominio è tutto $\mathbb{R}$ tranne il punto 0 ($D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$). Cerchiamo di capire l'andamento della funzione per valori di x che si avvicinano a 0. In questo caso il limite destro e il limite sinistro non coincidono, infatti:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

quindi in questo caso il limite non esiste.
Nel primo caso si parla di *discontinuità apparente* e nel secondo si parla di *discontinuità di salto*.

Definizione di limite

Formalizziamo ora il concetto di limite per $x \to x_0$ quando il valore assunto dalla funzione tende a un valore reale, $L \in \mathbb{R}$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Definizione di limite

Formalizziamo ora il concetto di limite per $x \to x_0$ quando il valore assunto dalla funzione tende a un valore reale, $L \in \mathbb{R}$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Formalmente: $\forall I_\varepsilon(L),\ \exists\, I_\delta(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0),\ f(x) \in I_\varepsilon(L)$.

Definizione di limite

Formalizziamo ora il concetto di limite per $x \to x_0$ quando il valore assunto dalla funzione tende a un valore reale, $L \in \mathbb{R}$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Formalmente: $\forall I_\varepsilon(L), \ \exists \, I_\delta(x_0) \ : \forall x \in I_\delta(x_0), \ f(x) \in I_\varepsilon(L)$.
Il significato è il seguente: comunque si prenda un intorno di L di raggio ε piccolo a piacere sulle ordinate, esiste un intorno di x_0 di raggio δ sulle ascisse tale che per ogni x appartenente a questo intorno, $f(x)$ appartiene all'intorno di raggio ε sull'asse delle ordinate.

Definizione di limite

Non si discosta molto dalla definizione precedente, il caso in cui il limite per $x \to x_0$ va all'infinito. Un esempio può essere la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ che non è definita per $x = 0$. Se ci avviciniamo da sinistra e da destra al valore 0 la funzione diventa sempre più grande e va verso $+\infty$, in questo caso si parla di *discontinuità di infinito*.

Definizione di limite

Non si discosta molto dalla definizione precedente, il caso in cui il limite per $x \to x_0$ va all'infinito. Un esempio può essere la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ che non è definita per $x = 0$. Se ci avviciniamo da sinistra e da destra al valore 0 la funzione diventa sempre più grande e va verso $+\infty$, in questo caso si parla di *discontinuità di infinito*. In generale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Definizione di limite

Non si discosta molto dalla definizione precedente, il caso in cui il limite per $x \to x_0$ va all'infinito. Un esempio può essere la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ che non è definita per $x = 0$. Se ci avviciniamo da sinistra e da destra al valore 0 la funzione diventa sempre più grande e va verso $+\infty$, in questo caso si parla di *discontinuità di infinito*. In generale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si può definire formalmente nel modo seguente:
$\forall I_M(+\infty), \; \exists \, I_\delta(x_0) \; : \forall x \in I_\delta(x_0), \; f(x) \in I_M(+\infty)$

Definizione di limite

Notiamo che se avessimo scelto nell'esempio la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avremmo avuto due risultati differenti per il limite sinistro e destro. Infatti:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Definizione di limite

Notiamo che se avessimo scelto nell'esempio la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avremmo avuto due risultati differenti per il limite sinistro e destro. Infatti:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

in questo caso il limite non esiste. Non è comunque sbagliato dire che la funzione in valore assoluto in 0 va a ∞.

Definizione di limite

Ora consideriamo un intorno di infinito.

Definizione di limite

Ora consideriamo un intorno di infinito.
La definizione di limite di funzione per $x \to \pm\infty$ riprende la definizione data per i limiti di successioni; ora che abbiamo formalizzato il concetto di intorno, la possiamo formulare adottando la nuova terminologia:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Definizione di limite

Ora consideriamo un intorno di infinito.
La definizione di limite di funzione per $x \to \pm\infty$ riprende la definizione data per i limiti di successioni; ora che abbiamo formalizzato il concetto di intorno, la possiamo formulare adottando la nuova terminologia:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

che, utilizzando la nozione di intorno di infinito, formalmente significa:
$\forall I_\varepsilon(L),\ \exists\, I_M(+\infty) : \forall x \in I_M(+\infty),\ f(x) \in I_\varepsilon(L)$

Definizione di limite

Ora consideriamo un intorno di infinito.
La definizione di limite di funzione per $x \to \pm\infty$ riprende la definizione data per i limiti di successioni; ora che abbiamo formalizzato il concetto di intorno, la possiamo formulare adottando la nuova terminologia:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

che, utilizzando la nozione di intorno di infinito, formalmente significa:
$\forall I_\varepsilon(L),\ \exists\, I_M(+\infty) : \forall x \in I_M(+\infty),\ f(x) \in I_\varepsilon(L)$
Con ragionamenti analoghi si definiscono i limiti di funzione per $x \to -\infty$ oppure per funzioni che tendono a $\pm\infty$.

Funzioni continue

Per essere continua una funzione in x_0 non solo il limite deve esistere, ma deve anche essere uguale al valore della funzione in quel punto. Formalmente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè la funzione è **continua in $\mathbf{x_0}$**.

Funzioni continue

Per essere continua una funzione in x_0 non solo il limite deve esistere, ma deve anche essere uguale al valore della funzione in quel punto. Formalmente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè la funzione è **continua in $\mathbf{x_0}$**.
Una funzione si dice **continua** se lo è in ogni punto del proprio dominio.

Funzioni continue

Notiamo che una funzione può essere continua nel proprio dominio anche se il dominio di definizione è definito come unione di intervalli sconnessi. Ad esempio la funzione $\frac{1}{x}$ è una funzione continua nel suo dominio di definizione che è $(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Quindi, $\frac{1}{x}$ è una funzione continua sull'unione di due intervalli aperti $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Funzioni continue

Esempio di funzione non continua

Un esempio di funzione discontinua è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che è chiaramente definita su tutto $\mathbb{R}$ ma è discontinua in 0.

Funzioni continue

Esempio di funzione non continua

Un esempio di funzione discontinua è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che è chiaramente definita su tutto $\mathbb{R}$ ma è discontinua in 0.

Infinitesimi

Nel caso delle successioni però non è necessario specificare che una successione a_n è infinitesima per $n \to +\infty$ perché per una successione non si può vedere altro che il limite per $n \to +\infty$. Nel caso delle funzioni però occorre specificare quando una funzione è infinitesima per $x \to x_0$ con x_0 punto di accumulazione per il dominio della funzione stessa. Uno dei casi più comuni è il caso in cui $x \to 0$. Tutti gli altri casi si possono riportare a $x \to 0$ mediante una traslazione orizzontale.

Infinitesimi

Nel caso delle successioni però non è necessario specificare che una successione a_n è infinitesima per $n \to +\infty$ perché per una successione non si può vedere altro che il limite per $n \to +\infty$. Nel caso delle funzioni però occorre specificare quando una funzione è infinitesima per $x \to x_0$ con x_0 punto di accumulazione per il dominio della funzione stessa. Uno dei casi più comuni è il caso in cui $x \to 0$. Tutti gli altri casi si possono riportare a $x \to 0$ mediante una traslazione orizzontale.
La funzione $\sin x$ è infinitesima per $x \to 0$ perché $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$; lo stesso vale ad esempio per le funzioni x^2, $1 - \cos x$, ecc... Mentre la funzione $\sqrt{1-x}$ è infinitesima per $x \to 1$.
La cosa interessante è però capire qual è l'**ordine di infinitesimo**.

Ordine di infinitesimo

Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si dicono **infinitesime dello stesso ordine** per $x \to x_0$ (con x_0 punto di accumulazione del dominio) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

con $L \in \mathbb{R}$. Le funzioni sono inoltre **infinitesimi equivalenti** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La definizione di infinitesimo vale anche per $x \to \pm\infty$ se questo è un punto di accumulazione per il dominio.

Infinitesimi

La cosa più naturale da fare è quella di confrontare gli infinitesimi con le funzioni polinomiali che sono sempre le più facili da trattare, ad esempio poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

le funzioni $\sin x$ e x sono infinitesimi equivalenti (e quindi dello stesso ordine). In tal caso si può scrivere che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ cioè che $\sin x$ si può approssimare con x per $x \to 0$.

Infinitesimi

La cosa più naturale da fare è quella di confrontare gli infinitesimi con le funzioni polinomiali che sono sempre le più facili da trattare, ad esempio poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

le funzioni $\sin x$ e x sono infinitesimi equivalenti (e quindi dello stesso ordine). In tal caso si può scrivere che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ cioè che $\sin x$ si può approssimare con x per $x \to 0$.

Infinitesimi

Le funzioni $1 - \cos x$ e x^2 sono dello stesso ordine ma non equivalenti perché per $x \to 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

mentre sono equivalenti $1 - \cos x$ e $\frac{x^2}{2}$. In questo caso si può scrivere che $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

Simboli di Landau

Un modo alternativo per scrive questo tipo di approssimazioni è quello di utilizzare i cosiddetti *simboli di Landau*:

Simboli di Landau

Un modo alternativo per scrive questo tipo di approssimazioni è quello di utilizzare i cosiddetti *simboli di Landau*:
Si definisce un "**o piccolo**" di $(x - x_0)^k$ e si scrive $o((x - x_0)^k)$ un infinitesimo di ordine superiore a k per $x \to x_0$, la classe di tutte le funzioni che tendono a 0 più velocemente di $(x - x_0)^k$ per $x \to x_0$.

Simboli di Landau

Un modo alternativo per scrive questo tipo di approssimazioni è quello di utilizzare i cosiddetti *simboli di Landau*:
Si definisce un "**o piccolo**" di $(x - x_0)^k$ e si scrive $o((x - x_0)^k)$ un infinitesimo di ordine superiore a k per $x \to x_0$, la classe di tutte le funzioni che tendono a 0 più velocemente di $(x - x_0)^k$ per $x \to x_0$.
Utilizzando il simbolo *o piccolo* si può scrivere che

$$\sin x = x + o(x) \qquad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Infinitesimi

A differenza degli *infiniti* in cui, quando confrontiamo due polinomi quello che ci interessa è quello con il grado più alto, negli *infinitesimi* ci interessa quello con grado più basso in quanto le potenze più grandi sono trascurabili.

Infinitesimi

A differenza degli *infiniti* in cui, quando confrontiamo due polinomi quello che ci interessa è quello con il grado più alto, negli *infinitesimi* ci interessa quello con grado più basso in quanto le potenze più grandi sono trascurabili.
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi che non hanno lo stesso ordine per $x \to x_0$ o per $x \to \pm\infty$ il loro rapporto ci dice qual è l'infinitesimo di ordine superiore:

$$\text{se} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad f(x) \text{ ha ordine superiore}$$

$$\text{se} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad g(x) \text{ ha ordine superiore}$$

Asintoti

Una funzione $f(x) : I \to \mathbb{R}$ possiede un **asintoto verticale** per $x \to x_0$ di equazione $x = x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Una funzione possiede un **asintoto orizzontale** per $x \to \pm\infty$ di equazione $y = L$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Nel caso in cui il limite sia per $x \to -\infty$ si parla di asintoto orizzontale sinistro, per $x \to +\infty$ si parla di asintoto orizzontale destro.

Asintoti

Una funzione può possedere un numero arbitrario di asintoti verticali, anche un numero infinito di asintoti verticali come ad esempio la funzione $\tan x$ che possiede infiniti asintoti verticali in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La tangente, come una qualsiasi altra funzione, però non può attraversare il proprio asintoto verticale.

Asintoti

Una funzione può possedere un numero arbitrario di asintoti verticali, anche un numero infinito di asintoti verticali come ad esempio la funzione $\tan x$ che possiede infiniti asintoti verticali in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La tangente, come una qualsiasi altra funzione, però non può attraversare il proprio asintoto verticale. Mentre una funzione può possedere al più due asintoti orizzontali, uno sinistro ed uno destro ma può attraversare in modo continuo un proprio asintoto orizzontale, anche infinite volte come ad esempio la funzione $\frac{\sin x}{x}$.

Asintoti

Quando si parla di comportamento asintotico all'infinito di una funzione non ci riferiamo necessariamente ad un comportamento asintotico lineare, cioè a una retta. Una funzione può avvicinarsi per $x \to \infty$ arbitrariamente ad una qualsiasi curva e possiamo comprendere il suo andamento sostituendo alla variabile x valori molto grandi (in valore assoluto): ad esempio la funzione $\dfrac{x^3+1}{x}$ si comporta all'infinito come x^2 cioè il suo grafico si avvicinerà sempre di più al grafico di una parabola e non di una retta. In queste note, ci soffermiamo comunque ad analizzare casi in cui il comportamento all'infinito è quello di una retta. In questi casi un asintoto all'infinito può anche essere una retta con pendenza non nulla e in tal caso si parla di **asintoto obliquo**

Asintoti

La funzione $\dfrac{3x^3-4x+1}{7x^2+1} \sim \dfrac{3}{7}x$ per $x \to \infty$ si comporta come una retta di pendenza $\dfrac{3}{7}$; questo vuol dire che se la funzione avrà asintoto all'infinito, allora questo sarà un asintoto obliquo. Notiamo inoltre che approssimando la funzione all'infinito abbiamo già trovato la pendenza dell'asintoto che, in caso esistesse, avrà equazione $y = \dfrac{3}{7} + q$ con q da determinare.

Asintoti

Attenzione! Il fatto che il comportamento asintotico all'infinito di una funzione è quello di una retta non implica che tale funzione ammetta un asintoto obliquo. Mentre se osservassimo che il comportamento asintotico non è quello di una retta, allora potremmo affermare con certezza che la funzione non avrà un asintoto obliquo. Ad esempio, $f(x) = x + \ln(x) \sim x$, quindi la funzione *potrebbe* avere asintoto obliquo. Ma tale funzione non ammette un asintoto obliquo, infatti dovremmo tenere conto anche dei termini di grado più basso (in questo caso $\ln(x)$) che fanno discostare leggermente la funzione $f(x)$ all'infinito dal suo comportamento lineare.

Asintoto obliquo

Una funzione $f(x) : I \to \mathbb{R}$ possiede un **asintoto obliquo** per $x \to \pm\infty$ se:

Asintoto obliquo

Una funzione $f(x) : I \to \mathbb{R}$ possiede un **asintoto obliquo** per $x \to \pm\infty$ se:

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Asintoto obliquo

Una funzione $f(x) : I \to \mathbb{R}$ possiede un **asintoto obliquo** per $x \to \pm\infty$ se:

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- $\exists \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Asintoto obliquo

Una funzione $f(x) : I \to \mathbb{R}$ possiede un **asintoto obliquo** per $x \to \pm\infty$ se:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- $\exists \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $\exists \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$

In tal caso l'asintoto ha equazione $y = mx + q$.

Teorema degli zeri o di Bolzano

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ per cui i valori agli estremi hanno segno discorde, $f(a)f(b) < 0$.
Allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$, cioè esiste almeno uno zero della funzione.

Teorema degli zeri o di Bolzano

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ per cui i valori agli estremi hanno segno discorde, $f(a)f(b) < 0$.
Allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$, cioè esiste almeno uno zero della funzione.
Nota: questo non vieta alla funzione di avere più di uno zero, il teorema di Bolzano ci assicura solo che almeno uno zero esiste anche se non ci dà informazioni su come determinarlo.

Teorema degli zeri o di Bolzano

La funzione $f(x) = x^5 - 3x + 1$ è un polinomio di terzo grado non fattorizzabile mediante radici intere o razionali. Non esiste una formula risolutiva per le equazioni polinomiali di grado superiore al secondoma per il teorema degli zeri possiamo dire che sicuramente $f(x)$ possiede uno zero in $[0, 1]$ perché è continua (essendo un polinomio) e $f(a)f(b) = 1 \cdot (-1) = -1$ cioè agli estremi il segno di $f(x)$ è discorde.

Teorema degli zeri o di Bolzano

La funzione $f(x) = x^5 - 3x + 1$ è un polinomio di terzo grado non fattorizzabile mediante radici intere o razionali. Non esiste una formula risolutiva per le equazioni polinomiali di grado superiore al secondoma per il teorema degli zeri possiamo dire che sicuramente $f(x)$ possiede uno zero in $[0, 1]$ perché è continua (essendo un polinomio) e $f(a)f(b) = 1 \cdot (-1) = -1$ cioè agli estremi il segno di $f(x)$ è discorde.
Se vogliamo *avvicinarci* alla radice del polinomio possiamo dimezzare l'intervallo e scegliere tra $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ quello per cui vale ancora il teorema degli zeri (in questo caso $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) e continuare questo procedimento iterativo detto *metodo di bisezione o algoritmo dicotomico* per approssimare il più possibile la radice del polinomio.

Teorema dei valori intermedi

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ e siano $f(a) \neq f(b)$ (per semplicità pensiamo a $f(a) < f(b)$ ma il teorema vale anche nel caso contrario in modo analogo).
Allora, per ogni $f(a) < y < f(b)$, esiste almeno un punto $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$, cioè la funzione assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema dei valori intermedi

Il teorema non ci dice che la funzione assumi tutti **e soli** ma ci assicura che se f è continua ogni elemento compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ possiede almeno una controimmagine in $[a, b]$. L'intervallo $[f(a), f(b)]$ sull'asse delle ordinate è quindi sicuramente contenuto nell'immagine di f.

Teorema dei valori intermedi

Il teorema non ci dice che la funzione assumi tutti **e soli** ma ci assicura che se f è continua ogni elemento compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ possiede almeno una controimmagine in $[a, b]$. L'intervallo $[f(a), f(b)]$ sull'asse delle ordinate è quindi sicuramente contenuto nell'immagine di f.
La funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 3x + 1$ assume sicuramente tutti i valori compresi tra $f(1) = -1$ e $f(0) = 1$ nell'immagine.

Teorema dei valori intermedi

Il teorema non ci dice che la funzione assumi tutti **e soli** ma ci assicura che se f è continua ogni elemento compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ possiede almeno una controimmagine in $[a, b]$. L'intervallo $[f(a), f(b)]$ sull'asse delle ordinate è quindi sicuramente contenuto nell'immagine di f.
La funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 3x + 1$ assume sicuramente tutti i valori compresi tra $f(1) = -1$ e $f(0) = 1$ nell'immagine.
Il teorema dei valori intermedi è una generalizzazione del teorema di Bolzano perché ci assicura l'intersezione della funzione, non solo con la retta $y = 0$ ma anche con la retta $y = y_0$ per ogni $f(a) < y_0 < f(b)$.

Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$. Allora esistono sempre massimo e minimo assoluto sull'intervallo $[a, b]$.

Teorema di Weierstrass

Il teorema di Weierstrass è uno dei teoremi più importanti di analisi e vale in senso generalizzato anche per funzioni in più variabili. Esso non ci consente di trovare massimo e minimo di una funzione, per quello ci vuole anche un po' di calcolo differenziale, però ce ne assicura l'esistenza se l'intervallo di definizione è chiuso e la funzione è continua.

Teorema di Weierstrass

Il teorema di Weierstrass è uno dei teoremi più importanti di analisi e vale in senso generalizzato anche per funzioni in più variabili. Esso non ci consente di trovare massimo e minimo di una funzione, per quello ci vuole anche un po' di calcolo differenziale, però ce ne assicura l'esistenza se l'intervallo di definizione è chiuso e la funzione è continua.
La funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x^3$ è una funzione continua su $[0, 2]$ intervallo chiuso. E' difficile da studiare come funzione, anche utilizzando il calcolo differenziale, ma il teorema di Weierstrass ci assicura che su $[0, 2]$ essa possiede sicuramente massimo e minimo assoluti. Tali valori possono essere assunti anche negli estremi dell'intervallo se una funzione è monotòna.