Esercizi per il corso Matematica

Daniele Ritelli*

2007-2008

Lezione 1

Esercizio 1. I valori di a, b, c, e d sono $1, 2, 3$ e 4 ma non necessariamente in questo ordine. Dimostrare che il più grande possibile valore di $ab + bc + cd + da$ è 25.

Esercizio 2. Provare che se $r \geq s \geq t$ allora

$$r^2 - s^2 + t^2 \geq (r - s + t)^2.$$

Esercizio 3. Provare che

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

e che

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Dedurre poi la disuguaglianza fra medie aritmetica e geometrica per tre numeri reali positivi, cioè, provare che se $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, allora

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

Lezione 2

Esercizio 4. Siano $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ and $B = \{a, e, i, o, u\}$. Trovare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

Risposte:
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$, $A \cap B = \{a, e\}$, $A \setminus B = \{b, c, d, f\}$, $B \setminus A = \{i, o, u\}$

Esercizio 5. Siano $C =]-5; 5[$, $D =]-1; +\infty[$. Trovare $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$, e $D \setminus C$.

Risposte:
$]-1; 5[$, $]-5; +\infty[$, $]-5; -1]$, $[5; +\infty[$

Esercizio 6. Siano $C =]-5; 3[$, $D = [4; +\infty[$. Trovare $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$, e $D \setminus C$.

Risposte:
$\varnothing$, $]-5; 3[\cup [4; +\infty[$, $]-5; 3[$, $[4; +\infty[$

Esercizio 7. Siano $C = [-1; -2 + \sqrt{3}[$, $D = [-1/2; \sqrt{2} - 1]$. Trovare $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$, and $D \setminus C$.

Risposte:
$[-1/2; -2 + \sqrt{3}[$, $[-1; \sqrt{2} - 1]$, $[-1; -0.5[$, $[-2 + \sqrt{3}; \sqrt{2} - 1]$

Esercizio 8. Scrivere eliminando il valore assoluto:

$$\left| \sqrt{3} - \sqrt{|2 - \sqrt{15}|} \right|$$

*Grazie a David A. Santos dsantos@ccp.edu

Risposta: $\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{15}-2}$

Esercizio 9. Scrivere eliminando il valore assoluto, se $x>2$:

$$|x-|1-2x||$$

.

Soluzione: Se $x>\frac{1}{2}$, abbiamo $|1-2x|=2x-1$. Così $|x-|1-2x||=|x-(2x-1)|=|-x+1|$. Se $x>1$ allora $|-x+1|=x-1$. In conclusione, per ogni $x>1$ (e *a fortiori* $x>2$, abbiamo

$$|x-|1-2x||=x-1$$

Esercizio 10. Risolvere $|5x-2|=|2x+1|$.

Soluzione: Abbiamo

$$\begin{aligned}|5x-2|=|2x+1| &\iff (5x-2=2x+1) \text{ o } (5x-2=-(2x+1))\\ &\iff (x=1) \text{ o } (x=\frac{1}{7})\\ &\iff x\in\left\{\frac{1}{7},1\right\}\end{aligned}$$

Esercizio 11. Risolvere $|x-2|+|x-3|=1$.

Soluzione: Il primo termine si annulla quando $x=2$ r il secondo termine si annulla quando $x=3$. Ripartiamo $\mathbb{R}$ in intervalli di estremi in cui ogni addendo dei valori assoluti si annulla. Così abbiamo

$$\mathbb{R}=]-\infty;2]\ \cup\ [2;3]\ \cup[3;+\infty[.$$

Analizziamo il diagramma

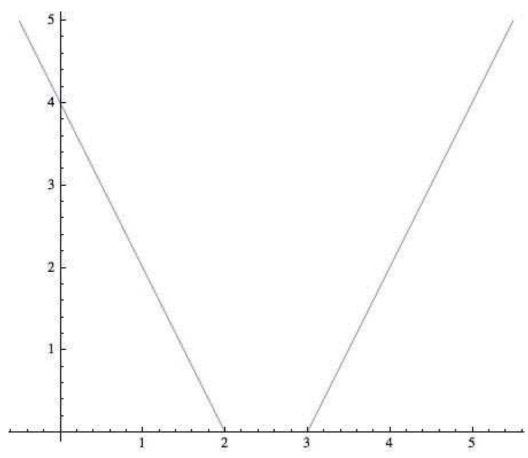
$x\in$	$]-\infty;2]$	$[2;3]$	$[3;+\infty[$
$\|x-2\|=$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$
$\|x-3\|=$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\|x-2\|+\|x-3\|=$	$-2x+5$	1	$2x-5$

Su $]-\infty;2]$ troviamo $-2x+5=1$ quindi $x=2$.

Su $[2;3]$ otteniamo l'identità $1=1$. Questo significa che tutti i numeri di questo intervallo sono soluzioni di questa equzione.

On $[3;+\infty[$ abbiamo $2x-5=1$ da cui $x=3$.

Riassumendo, l'insieme delle soluzioni è $\{x|x\in[2;3]\}$.



Esercizio 12. Risolvere l'equazione $|x| + |x - 1| = 2$. **Risposta:** $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

Esercizio 13. Risolvere l'equazione $|x| + |x - 1| = 1$. **Risposta:** $\{x|x \in [0; 1]\}$

Esercizio 14. Risolvere l'equazione $|2x| + |x - 1| - 3|x + 2| = 1$. **Risposta:** $\{-1\}$

Esercizio 15. Risolvere l'equazione $|2x| + |x - 1| - 3|x + 2| = -7$. **Risposta:** $[1; +\infty[$

Esercizio 16. Risolvere l'equazione $|2x| + |x - 1| - 3|x + 2| = 7$. **Risposta:** $] - \infty; -2]$

Esercizio 17. Se $x < 0$ provare che

$$\left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right| = 1 - 2x.$$

Esercizio 18. Risolvere l'equazione $|x^2 - 3x| = 2$. **Risposta:** $\{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, 1, 2\}$

Esercizio 19. Risolvere l'equazione $x^2 - 2|x| + 1 = 0$. **Risposta:** $\{-1, 1\}$

Esercizio 20. Risolvere l'equazione $x^2 - |x| - 6 = 0$. **Risposta:** $\{-3, -2, 2, 3\}$

Esercizio 21. Risolvere l'equazione $x^2 = |5x - 6|$. **Risposta:** $\{-6, 1, 2, 3\}$

Esercizio 22. Provare che se $x \leq -3$, allora $|x + 3| - |x - 4|$ è costante.

Esercizio 23. Provare che $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Esercizio 24. Provare che $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

Lezione 3

Esercizio 25. Disegnare il grafico della funzione $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |2x - 1| \end{array}$ e calcolare $f(-1), f(0), f(1)$.

Esercizio 26. Sia $f : \mathbf{Dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f ha un *punto unito* in $t \in \mathbf{Dom}\,(f)$ se $f(t) = t$.

Sia $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 2x^3 + 2x$. Determinare tutti i punti uniti di f.

Soluzione: Si devono trovare tutte le $x \in \mathbf{Dom}\,(f)$ per cui $f(x) = x$. Così

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \Longrightarrow & x^5 - 2x^3 + 2x = x \\ & \Longrightarrow & x^5 - 2x^3 + x = 0 \\ & \Longrightarrow & x(x^4 - 2x^2 + 1) = 0 \\ & \Longrightarrow & x(x^2 - 1)^2 = 0 \\ & \Longrightarrow & x(x + 1)^2(x - 1)^2 = 0. \end{array}$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione sono $\{-1, 0, 1\}$. Poiché $-1 \notin \mathbf{Dom}\,(f)$, i soli punti uniti di f sono $x = 0$ e $x = 1$.

Esercizio 27. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x$. Calcolare

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{h}.$$

Esercizio 28. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x$. Calcolare

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{h}.$$

Esercizio 29. Sia $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $a(2 - x) = x^2 - 5x$. Calcolare $a(3)$, $a(x)$ e $a(a(x))$.

Risposta: $a(3) = 6$; $a(x) = x^2 + x - 6$; $a(a(x)) = 24 - 11x - 10x^2 + 2x^3 + x^4$

Esercizio 30. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(1-x) = x^2 - 2$. Trovare $f(-2)$, $f(x)$ e $f(f(x))$.

Risposta: $f(-2) = 7$, $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $f(f(x)) = x^4 - 4x^3 + 8x + 2$

Esercizio 31. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $h(1-x) = 2x$. Determinare $h(3x)$.

Soluzione: Rinominiamo la variabile indipendente: $h(1-s) = 2s$. Ora, se $1 - s = 3x$ allora $s = 1 - 3x$. Quindi

$$h(3x) = h(1-s) = 2s = 2(1-3x) = 2 - 6x.$$

Esercizio 32. Consideriamo il polinomio

$$(1 - x^2 + x^4)^{2003} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{8012}x^{8012}.$$

Determinare

❶ a_0

❷ $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{8012}$

❸ $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{8011} + a_{8012}$

❹ $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{8010} + a_{8012}$

❺ $a_1 + a_3 + \cdots + a_{8009} + a_{8011}$

Soluzione: Poniamo

$$p(x) = (1 - x^2 + x^4)^{2003} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{8012}x^{8012}.$$

Allora

❶ $a_0 = p(0) = (1 - 0^2 + 0^4)^{2003} = 1.$

❷ $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{8012} = p(1) = (1 - 1^2 + 1^4)^{2003} = 1.$

❸
$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{8011} + a_{8012} &= p(-1) \\ &= (1 - (-1)^2 + (-1)^4)^{2003} \\ &= 1. \end{aligned}$$

❹ La somma richiesta è $\dfrac{p(1) + p(-1)}{2} = 1.$

❺ La somma richiesta è $\dfrac{p(1) - p(-1)}{2} = 0.$

Esercizio 33. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una funzione tale che $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$[f(x^3 + 1)]^{\sqrt{x}} = 5,$$

determinare

$$\left[f\left(\frac{27 + y^3}{y^3}\right)\right]^{\sqrt{\frac{27}{y}}}$$

per $y \in]0; +\infty[$.

Soluzione: Abbiamo

$$\begin{aligned} \left[f\left(\tfrac{27+y^3}{y^3}\right)\right]^{\sqrt{\frac{27}{y}}} &= \left[f\left(\left(\tfrac{3}{y}\right)^3 + 1\right)\right]^{3\sqrt{\frac{3}{y}}} \\ &= \left(\left[f\left(\left(\tfrac{3}{y}\right)^3 + 1\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}}\right)^3 \\ &= 5^3 \\ &= 125. \end{aligned}$$

Esercizio 34. Determinare tutte le funzioni g che soddisfano

$$g(x+y)+g(x-y)=2x^2+2y^2$$

Soluzione: Sia $y=0$. Allora $2g(x)=2x^2$, cioè, $g(x)=x^2$.
Verifichiamo che $g(x)=x^2$ *funziona*. Si ha:

$$\begin{aligned} g(x+y)+g(x-y) &= (x+y)^2+(x-y)^2 \\ &= x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2 \\ &= 2x^2+2y^2. \end{aligned}$$

Esercizio 35. Determinare tutte le funzioni f che soddisfano

$$f(xy)=yf(x). \tag{E}$$

Soluzione: Se $x=1$ allora $f(y)=yf(1)$. Essendo $f(1)$ una costante, poniamo $k=f(1)$. Dunque tutte le funzioni che soddisfano (E) devono soddisfare $f(y)=ky$.

Esercizio 36. Determinare tutte le funzioni f per cui

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=x. \tag{F}$$

Soluzione: Da $f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$ otteniamo $f(\frac{1}{x})=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}f(x)$. Poi, sostituendo $1/x$ per x (F) otteniamo

$$f(1/x)+2f(x)=1/x.$$

Quindi

$$f(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}f(1/x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}f(x)\right),$$

che porge

$$f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}$$

Esercizio 37. Scrivere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+|x+2|$ come funzione definita per casi. Fare il grafico.

Esercizio 38. Scrivere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x|x|$ come funzione definita per casi. Fare il grafico.

Esercizio 39. Scrivere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+|x|$ come funzione definita per casi. Fare il grafico.

Esercizio 40. Grafico di $x\mapsto\lfloor 2x\rfloor$.

Esercizio 41. Grafico di $x\mapsto\lfloor x^2\rfloor$.

Esercizio 42. Sia

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x\in]-\infty;-1[\\ |x| & \text{se } x\in[-1;1] \\ 1+2x & \text{se } x\in]1;+\infty[\end{cases}$$

Fare il grafico e calcolare

1. $g(-\infty)$
2. $g(-1-)$
3. $g(-1)$
4. $g(-1+)$
5. $g(0)$
6. $g(1-)$
7. $g(1)$
8. $g(1+)$
9. $g(+\infty)$

Esercizio 43. Risolvere l'equazione $\lfloor\frac{x}{5}\rfloor=10$.

Lezione 4

Esercizio 44. Tracciare il grafico delle seguenti curve:

❶ $y = |x-2| + 3$

❷ $y = (x-2)^2 + 3$

❸ $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$

❹ $y = \sqrt{1-(x-2)^2} + 3$

❺ $y = \sqrt{4-x^2} + 1$

Esercizio 45. Come cambia l'equazione della curva $y = f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$ dopo una traslazione di una unità giù e due unità a destra? **Risposta:** $y = f(x-2) - 1 = (x-2)^2 - \dfrac{1}{x-2} - 1$

Esercizio 46. Supponiamo che la curva $y = f(x)$ sia traslata di a unità verticalmente e di b unità orizzontalmente, in questo ordine. Si avrebbe lo stesso effetto traslando la curva di b unità orizzontalmente prima, e poi di a unità verticalmente?

Risposta: Sì.

Esercizio 47. Tracciare il grafico delle seguenti curve:

❶ $y = \dfrac{x^2}{2}$

❷ $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$

❸ $y = 2|x| + 1$

❹ $y = \dfrac{2}{x}$

❺ $y = x^2 + 4x + 5$

❻ $y = 2x^2 + 8x$

Esercizio 48. La curva $y = \dfrac{1}{x}$ è sottoposta alla seguente sequenza di trasformazioni:

(i) una traslazione di una unità a sinistra,

(ii) una dilatazione verticale di un fattore 2,

(iii) una traslazione di una unità giù.

Dimostrare che l'equazione risultante è $y = \dfrac{1}{2x+2} - 1$ e farne il grafico.

Esercizio 49. Grafico di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$.

Esercizio 50. Grafico delle seguenti curve:

❶ $y = x^2$

❷ $y = (x-1)^2$

❸ $y = (|x|-1)^2$

Esercizio 51. Grafico delle seguenti curve:

❶ $y = x^2$

❷ $y = x^2 - 1$

❸ $y = |x^2 - 1|$

Esercizio 52. Sia f una funzione dispari che sia definita in $x = 0$. Provare che $f(0) = 0$.

Esercizio 53. Grafico delle seguenti curve:

❶ $y = x^2 + 2x + 3$

❷ $y = x^2 + 2|x| + 3$

❸ $y = |x^2 + 2x + 3|$

❹ $y = |x^2 + 2|x| + 3|$

Esercizio 54. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Fare il grafico delle seguenti curve e stabilire come cambia il dominio per ogni nuova curva. Alcune di queste curve sono identiche?

❶ $y = f(x-2)$

❷ $y = |f(x-2)|$

❸ $y = f(|x|-2)$

❹ $y = f(|x-2|)$

Esercizio 55. Una curve può essere sia pari che dispari simultaneamente? Che tipo di grafico dovrebbe avere?

Esercizio 56. Grafico delle seguenti curve:

❶ $y = 1 - x$

❷ $y = |1 - x|$

❸ $y = 1 - |1 - x|$

❹ $y = |1 - |1 - x||$

❺ $y = 1 - |1 - |1 - x||$

❻ $y = |1 - |1 - |1 - x|||$

❼ $y = 1 - |1 - |1 - |1 - x|||$

❽ $y = |1 - |1 - |1 - |1 - x||||$

Esercizio 57. Usare f nella figura 1 per tracciare il grafico delle curve seguenti

❶ $y = 2f(x)$

❷ $y = f(2x)$

❸ $y = f(-x)$

❹ $y = -f(x)$

❺ $y = -f(-x)$

❻ $y = f(|x|)$

❼ $y = |f(x)|$

❽ $y = f(-|x|)$

❾ $y = |f(|x|)|$

❿ $y = |f(-|x|)|$

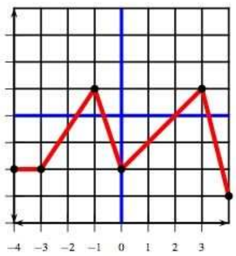


Figura 1:

Esercizio 58. Nelle figure 2 e 3 è rappresentato il grafico di due curve, $y = f(x)$ e $y = f(ax)$ per una certa costante reale $a < 0$.

❶ Determinare il valore della costante a.

❷ Determinare il valore di C.

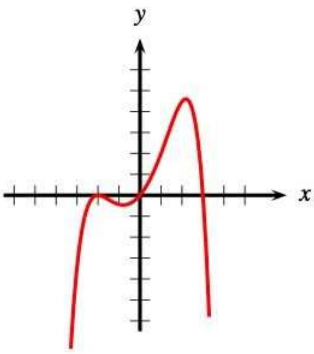


Figura 2:

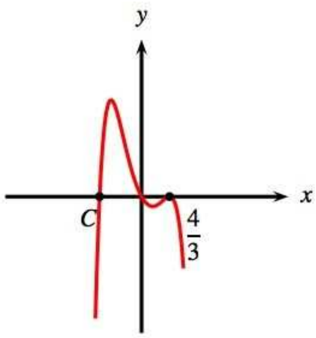


Figura 3:

Lezione 5

Esercizio 59. Sapendo che la funzione sotto assegnata è continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + 3a & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

trovare a. **Risposta:** Si ha $f(1-) = 0$ e $f(1+) = 2 + 3a$. Allora $0 = 2 + 3a$ cioè $a = -\dfrac{2}{3}$.

Esercizio 60. Provare che se f verifica la condizione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(t) - (f(t))^2}$$

ha periodo 2.

Lezione 6

Esercizio 61. Qui sotto sono date alcune formule. Verificare che l'insieme indicato è il dominio naturale di ciascuna formula.

Formula	Dominio Naturale
$x \mapsto \sqrt{(1-x)(x+3)}$	$x \in [-3; 1]$.
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}$	$x \in]-3; 1]$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}$	$x \in [-3; 1[$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{(x+3)(1-x)}}$	$x \in]-3; 1[$

Esercizio 62. Trovare il dominio naturale delle regole:

❶ $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|}}$

❷ $x \mapsto \sqrt[4]{5-|x|}$

❸ $x \mapsto \sqrt[3]{5-|x|}$

❹ $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

❺ $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}}$

❻ $x \mapsto \dfrac{1}{|x-1|+|x+1|}$

❼ $x \mapsto \dfrac{\sqrt{-x}}{x^2-1}$

❽ $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-|x|}$

❾ $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{-x}$

Risposte:

❶ $\mathbb{R}$

❷ $[-5; 5]$

❸ $\mathbb{R}$

❹ $\mathbb{R}$

❺ $]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; +\infty[$

❻ $\mathbb{R}$

❼ $]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$

❽ $]-1; 1[$

❾ $\{0\}$

Esercizio 63. Qui sotto sono date alcune formule. Verificare che l'insieme indicato è il dominio naturale di ciascuna formula.

Formula	Dominio Naturale
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$	$x \in]-3;0] \bigcup]3;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{-\lvert x\rvert}$	$x = 0$
$x \mapsto \sqrt{-\lvert\lvert x\rvert-2\rvert}$	$x \in \{-2, 2\}$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x}}$	$x \in]0;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{-x}}$	$x \in]-\infty;0[$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{-\lvert x\rvert}}$	$\varnothing$ (insieme vuoto)
$x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$	$x \in]-1;0[\bigcup]0;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{1+x+\sqrt{1-x}}$	$[-1;1]$

Esercizio 64. Trovare il dominio naturale della regola

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 12x}$$

Risposta: $[-2\sqrt{3};0] \cup [2\sqrt{3};+\infty[$.

Esercizio 65. Trovare il dominio naturale della regola

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}}.$$

Risposta: $x \in]-\infty;1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3};+\infty[$.

Esercizio 66. Trovare il dominio naturale delle regole:

❶ $x \mapsto \sqrt{-(x+1)^2}$,

❷ $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-(x+1)^2}}$

❸ $f(x) = \dfrac{x^{1/2}}{\sqrt{x^4-13x^2+36}}$

❹ $g(x) = \dfrac{\sqrt[4]{3-x}}{\sqrt{x^4-13x^2+36}}$

❺ $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^6-13x^4+36x^2}}$

❻ $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^5-13x^3+36x}}$

❼ $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lvert x^4-13x^2+36\rvert}}$

Risposte:

❶ $\{-1\}$

❷ $\varnothing$

❸ $[0;2[\cup]3;+\infty[$

❹ $]3;+\infty[$

❺ $]-\infty;-3[\cup]-2;0[\cup]0;2[\cup]3;+\infty[$

❻ $]-3;-2[\cup]0;2[\cup]3;+\infty[$

❼ $\mathbb{R} \setminus \{-3,-2,2,3\}$

Esercizio 67. Siano

$$f : \begin{array}{ccc} [-5;3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4-16 \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} [-4;2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lvert x\rvert-4 \end{array}.$$

Trovare

❶ $\mathbf{Dom}\,(f+g)$

❷ $\mathbf{Dom}\,(fg)$

❸ $\mathbf{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)$

❹ $\mathbf{Dom}\left(\dfrac{g}{f}\right)$

❺ $(f+g)(2)$

❻ $(fg)(2)$

❼ $\dfrac{f}{g}(2)$

❽ $\dfrac{g}{f}(2)$

❾ $\dfrac{f}{g}(1)$

❿ $\dfrac{g}{f}(1)$

Risposte:

❶ $[-4;2]$

❷ $[-4;2]$

❸ $]-4;2]$

❹ $[-4;-2[\cup]-2;2[$

❺ -2

❻ 0

❼ 0

❽ non definita

❾ 5

❿ $\dfrac{1}{5}$

Esercizio 68. Siano

$$f: \begin{array}{ccc} \{-2,-1,0,1,2\} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} \{0,1,2\} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

❶ Trovare $\mathbf{Im}\,(f)$.

❷ Trovare $\mathbf{Im}\,(g)$.

❸ Trovare $\mathbf{Dom}\,(f\circ g)$.

❹ Trovare $\mathbf{Dom}\,(g\circ f)$.

Risposte: 1)$\{-4,-2,0,2,4\}$ 2) $\{0,1,4\}$ 3) $\{0,1\}$. 4) $\{0,2\}$.

Esercizio 69. Siano $f,g,h:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,10,1993\}$ definite da

$$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=10, f(4)=1993,$$
$$g(1)=g(2)=2, g(3)=g(4)-1=1,$$
$$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)+1=2.$$

❶ Calcolare $(f+g+h)(3)$

❷ Calcolare $(fg+gh+hf)(4)$.

❸ Calcolare $f(1+h(3))$.

❹ Calcolare $(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(2)+f(g(2)+2)$.

Risposte: (1) 13, (2) 5981, (3) 10, (4) 1995

Esercizio 70. Se $a,b,c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sono le funzioni $a(t)=t-2, b(t)=t^3, c(t)=5$ dimonstrare che

$$\begin{array}{lcl} (a\circ b)(t) & = & t^3-2 \\ (b\circ a)(t) & = & (t-2)^3 \\ (b\circ c)(t) & = & 125 \\ (c\circ b)(t) & = & 5 \\ (c\circ a)(t) & = & 5 \\ (a\circ b\circ c)(t) & = & 123 \\ (c\circ b\circ a)(t) & = & 5 \\ (a\circ c\circ b)(t) & = & 3 \end{array}$$

Esercizio 71. Siano

$$f: \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-2} \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} [-2;2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array}.$$

❶ Trovare $\mathbf{Im}\,(f)$. ❷ Trovare $\mathbf{Im}\,(g)$. ❸ Trovare $\mathbf{Dom}\,(f\circ g)$. ❹ Trovare $\mathbf{Dom}\,(g\circ f)$. ❺ Trovare $(f\circ g)(x)$. ❻ Trovare $(g\circ f)(x)$.

Risposte: 1) $[0;+\infty]$ 2) $[0;2]$ 3) $\{0\}$. 4) $[2;6]$. 5) $\sqrt{\sqrt{4-x^2}-2}$. 6) $\sqrt{6-x}$.

Esercizio 72. Siano

$$f:\begin{array}{ccc}[-\sqrt{2};+\sqrt{2}[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sqrt{2-x^2}\end{array},\quad g:\begin{array}{ccc}]-\infty;0] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & -\sqrt{-x}\end{array}.$$

❶ Trovare $\mathbf{Im}\,(f)$. ❷ Trovare $\mathbf{Im}\,(g)$. ❸ Trovare $\mathbf{Dom}\,(f\circ g)$. ❹ Trovare $\mathbf{Dom}\,(g\circ f)$. ❺ Trovare $(f\circ g)(x)$. ❻ Trovare $(g\circ f)(x)$.

Risposte: 1) $[0;\sqrt{2}]$ 2) $]-\infty;0]$ 3) $[-2;0]$. 4) $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$. 5) $\sqrt{2+x}$. 6) $-\sqrt{-\sqrt{2-x^2}}$.

Esercizio 73. *Sia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la funzione definita da* $f(x)=ax^2-\sqrt{2}$ *per un certo positivo* a. *If* $(f\circ f)(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ *trovare il valore di* a. **Risposta:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 74. Sia $f:]0:+\infty[\to]0:+\infty[$, tale che $f(2x)=\dfrac{2}{2+x}$. Trovare $2f(x)$. **Risposta:** $\dfrac{8}{4+x}$

Esercizio 75. *Siano* $f,g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, *con* $f(x)=\dfrac{4}{x-1}, g(x)=2x$, *trovare tutte le* x *per cui* $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$. **Risposta:** $x=1/3$.

Esercizio 76. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(1-x)=x^2$. Trovare $(f\circ f)(x)$. **Risposta:** $(f\circ f)(x)=4x^2-4x^3+x^4$.

Esercizio 77. *Sia* $f:\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}\to\mathbb{R}\setminus\{\frac{c}{2}\}, x\mapsto\dfrac{cx}{2x+3}$ *tale che* $(f\circ f)(x)=x$. *Trovare il valore di* c. **Risposta:** $c=-3$

Lezione 7

Esercizio 78. Dimostrare che $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $h(s)=3-s$ è una biezione.

Esercizio 79. Dimostrare che $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $g(x)=x^{1/3}$ è una biezione.

Esercizio 80. Dimostrare che $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ definita da $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ è una biezione.

Esercizio 81. Dimostrare che $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\}\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x+1}\end{array}$ is suriettiva ma che $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x+1}\end{array}$ non è suriettiva. **Risposta:** Dobbiamo far vedere che esiste una soluzione x dell'equazione $f(x)=b, b\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ora

$$f(x)=b\implies\frac{2x}{x+1}=b\implies x=\frac{b}{2-b}.$$

Così se $b\neq 2$ esiste $x\in\mathbb{R}$ con $f(x)=b$. Poichè non esiste x tale che $g(x)=2$ e $2\in\mathbf{Target}\,(g)$, g non è suriettiva.

Esercizio 82. Classificare ognuna delle seguenti funzioni come iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuna di queste.

❶ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^4$

❷ $f:\mathbb{R}\to\{1\},\quad x\mapsto 1$

❸ $f:[0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^3$

❹ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto|x|$

❺ $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -|x|$

❻ $f : \mathbb{R} \to [0; +\infty[, \quad x \mapsto |x|$

❼ $f : [0; +\infty[\to [0; +\infty[, \quad x \mapsto x^4$

Risposta:

❶ nessuna, $f(-1) = f(1)$ così non iniettiva. Non esiste a con $f(a) = -1$, così non suriettiva.

❷ suriettiva, $f(1) = f(-1)$ così non iniettiva.

❸ suriettiva, non iniettiva.

❹ nulla, $|1| = |-1|$: non iniettiva, non esiste a con $|a| = -1$: non suriettiva.

❺ iniettiva, non-suriettiva poichè, non esiste a con $-|a| = 1$.

❻ suriettiva, non-iniettiva poiché $|-1| = |1|$ ma $-1 \neq 1$.

❼ biettiva.

Esercizio 83. Siano $f : E \to F, g : F \to G$ due funzioni. Dimostrare che se $g \circ f$ è suriettiva allora gè suriettiva.

Esercizio 84. Siano $f : E \to F, g : F \to G$ due funzioni. Dimostrare che se $g \circ f$ è iniettiva allra f è iniettiva.

Esercizio 85. Sia

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+2} \end{array}.$$

Dimostrare che c è biettiva e trovare la sua inversa.

Risposta: Poiché $c(c^{-1}(x)) = x$, si ha $\dfrac{c^{-1}(x)}{c^{-1}(x)+2} = x$. Risolvendo per $c^{-1}(x)$ otteniamo $c^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1-x} = -2 + \dfrac{2}{1-x}$. L'inversa di c è allora

$$c^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ x & \mapsto & -2 + \dfrac{2}{1-x} \end{array}.$$

Esercizio 86. Consideriamo la regola

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}.$$

❶ trovare il dominio naturale di f.

❷ trovare la regola inversa f^{-1}.

❸ trovare l'immagine del dominio naturale di f e il dominio naturale di f^{-1}.

❹ Concludere.

Risposte:

❶ L'espressione dentro la radice cubica non può essere 0. Quindi $x^5 \neq 1$ e il dominio naturale è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

❷ Poniamo

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}.$$

Ora scambiamo x e y e risolviamo per y:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{y^5 - 1}} \implies x^3(y^5 - 1) = 1 \implies y = \sqrt[5]{\frac{x^3 + 1}{x^3}}.$$

Quindi

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x^3 + 1}{x^3}}.$$

❸ Al variare di x in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, l'espressione $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5 - 1}}$ prende valori positivi e negativi, ma mai 0. Quindi $\mathbf{Im}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. L'espressione per $f^{-1}(x)$ non è definita quando $x = 0$. Quindi il dominio naturale di f^{-1} è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

❹ La funzione

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5 - 1}} \end{array}$$

è una biezione con inversa

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \sqrt[5]{\dfrac{x^3 + 1}{x^3}} \end{array}.$$

Esercizio 87. Verificare che le funzioni elencate sotto, con il loro dominii ed immagini, hanno le inverse indicate.

Formula	Dominio Naturale	Immagine	Inversa
$x \mapsto \sqrt{2 - x}$	$]-\infty; 2]$	$[0; +\infty[$	$x \mapsto 2 - x^2$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$	$]-\infty; 2[$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto 2 - \frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{2 + x^3}{2 - x^3}$	$\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \sqrt[3]{\frac{2x - 2}{x + 1}}$
$x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}$

Esercizio 88. date $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 8$ e $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ trovare $(g \circ f^{-1})(-2)$.
Risposta: 3

Esercizio 89. Siano $f, g : A \to A$ invertibili. Mostrare che $f \circ g$ è invertibile e che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Esercizio 90. Dimostrare che $t : \begin{array}{ccc}]-\infty; 1] & \to & [0; +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{1 - x} \end{array}$ è una biezione e trovare t^{-1}.
Risposta: $t^{-1} : \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \to &]-\infty; 1] \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \end{array}$

Esercizio 91. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Per quali valori dei parametri si ha $f = f^{-1}$?
Risposta: O $a = 1, b = 0$ oppure $a = -1$ e b arbitrario.

Esercizio 92. Provare che se $ab \neq -4$ e $f : \mathbb{R} \setminus \{2/b\} \to \mathbb{R} \setminus \{2/b\}$, $f(x) = \frac{2x + a}{bx - 2}$ allora $f = f^{-1}$.

Lezione 8

Esercizio 93. Scrivere in forma canonica le seguenti parabole, determinare i loro vertici e farne il grafico:

i) $y = x^2 + 6x + 9$,

ii) $y = x^2 + 12x + 35$,

iii) $y = (x-3)(x+5)$,

iv) $y = x(1-x)$,

v) $y = 2x^2 - 12x + 23$,

vi) $y = 3x^2 - 2x + \frac{8}{9}$,

vii) $y = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 13$

Risposta:

i) $y = (x+3)^2$ vertice in $(-3, 0)$,

ii) $y = (x+6)^2 - 1$ vertice in $(-6, -1)$,

iii) $y = (x+1)^2 - 16$, vertice in $(-1, -16)$

iv) $y = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, vertice in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

v) $y = 2(x-3)^2 + 5$, vertice in $(3, 5)$,

vi) $3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}$, vertice in $(\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$

vii) $y = \frac{1}{5}(x+5)^2 + 8$, vertice in $(-5, 8)$

Esercizio 94. Trovare il vertice della parabola $y = (3x-9)^2 - 9$.
Risposta: $(3, -9)$

Esercizio 95. Trovare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, vertice in $(0, -1)$ passante per $(3, 17)$.
Risposta: $y = 2x^2 - 1$

Esercizio 96. trovare l'equazione della parabola che ha radici in $x = -3$ e $x = 4$ e passa per $(0, 24)$.
Risposta: $y = -2(x+3)(x-4)$

Esercizio 97. Trovare le radici reali dell'equazione $|x^2 - 2x| = |x^2 + 1|$.
Risposta: Si ha

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x| = |x^2 + 1| &\iff (x^2 - 2x = x^2 + 1) \text{ oppure } (x^2 + 2x = -x^2 - 1) \\ &\iff (-2x - 1 = 0) \text{ oppure } (2x^2 + 2x + 1 = 0) \\ &\iff \left(x = -\frac{1}{2}\right) \text{ oppure } \left(x = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\right), \end{aligned}$$

la soluzione è $-\dfrac{1}{2}$.

Esercizio 98. Trovare il polinomio cubico p con zeri in $x = -1, 2, 3$ e tale che $p(1) = -24$.
Risposta: Detto polinomio ha la forma $p(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$, così dobbiamo determinare a. Ora $-24 = p(1) = a(2)(-1)(-2) = 4a$. Quindi $a = -6$, pertanto $p(x) = -6(x+1)(x-2)(x-3)$.

Esercizio 99. Trovare il polinomio cubico c avente una radice in $x = 1$, una radice di molteplicità 2 int $x = -3$ e tale che $c(2) = 10$.
Risposta: Detto polinomio ha la forma $c(x) = a(x-1)(x+3)^2$. Ora $10 = c(2) = a(2-1)(2+3)^2 = 25a$, quindi $a = \dfrac{2}{5}$, pertanto $c(x) = \dfrac{2}{5}(x-1)(x+3)^2$.

Esercizio 100. Un polinomio cubico p con coefficiente direttivo 1 soddisfa $p(1) = 1$, $p(2) = 4$, $p(3) = 9$. Quanto vale $p(4)$?
Risposta: Poniamo $g(x) = p(x) - x^2$. Anche g è un polinomio cubico con coefficiente direttivo 1 inoltre $g(x) = 0$ per $x = 1, 2, 3$. Ne viene che $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ quindi $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x^2$. Allora $p(4) = (3)(2)(1) + 4^2 = 22$.

Esercizio 101. Per quali valori di a il polinomio

$$t(x) = x^3 - 3ax^2 + 12$$

è divisibile per $x + 4$?

Risposta:

$$\begin{aligned} 0 = t(-4) &= (-4)^3 - 3a(-4)^2 + 40 \\ \iff 0 &= -24 - 48a \\ \iff a &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 102. Grafico delle curve:

i) $y = (x-1)^3$,

ii) $y = (1-x)^3$,

iii) $y = (x-1)(x-2)^2$,

iv) $y = (1-x)(x-2)^2$,

v) $y = (1-x)^2(x-2)$,

vi) $y = (x-1)^2(2-x)$,

vii) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$,

viii) $y = (x-1)(x-2)(3-x)$

ix) $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$,

x) $y = x^2(x-1)^2(x+1)^4$,

xi) $y = x(x-1)^3(x+5)^5$

xii) $y = -x^2(x-1)(x+2)(x-3)^3$.

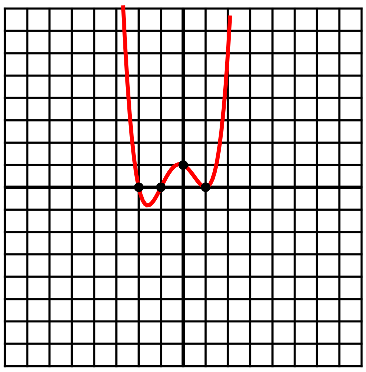
Esercizio 103. Il polinomio in figura ha grado 4.

❶ Determinare $p(0)$.

❷ Trovare l'equazione di $p(x)$.

❸ Trovare $p(-3)$.

❹ Trovare $p(2)$.



Lezione 9

Esercizio 104. Grafico delle seguenti curve.

1. $x \mapsto (1+x)^{1/2}$
2. $x \mapsto (1-x)^{1/2}$
3. $x \mapsto 1 + (1+x)^{1/3}$
4. $x \mapsto 1 - (1-x)^{1/3}$
5. $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{-x}$

Esercizio 105. Calcolare:

1. $\log_{1/3}\ 243$
2. $\log_{10}\ 0,00001$
3. $\log_{0,001}\ 100000$
4. $\log_9 \frac{1}{3}$

5. $\log_{1024}\ 64$
6. $\log_{5^{2/3}}\ 625$
7. $\log_{2\sqrt{2}}\ 32\sqrt[5]{2}$
8. $\log_{2}\ 0,0625$
9. $\log_{0,0625}\ 2$
10. $\log_{3}\ \sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}27^{-4/3}}}$

Risposte:
(1) -5, (2) -5, (3) $-\frac{5}{3}$, (4) $-\frac{1}{2}$, (5) $\frac{3}{5}$, (6) 6, (7) $\frac{52}{15}$, (8) -4 , (9) $-\frac{1}{4}$, (10) 1

Esercizio 106. Sia $a > 0, a \neq 1$. Calcolare:

1. $\log_{a}\ \sqrt[4]{a^{8/5}}$
2. $\log_{a}\ \sqrt[3]{a^{-15/2}}$
3. $\log_{a}\ \dfrac{1}{a^{1/2}}$
4. $\log_{a^3}\ a^6$
5. $\log_{a^2}\ a^3$
6. $\log_{a^{5/6}}\ a^{7/25}$

Risposte: (1) $\frac{2}{5}$, (2) $-\frac{5}{2}$, (3) $-\frac{1}{2}$, (4) 2, (5) $\frac{3}{2}$, (6) $\frac{42}{125}$

Esercizio 107. Risolvere le equazioni nella variabile x

1. $\log_{x}\ 3 = 4$
2. $\log_{3}\ x = 4$
3. $\log_{4}\ x = 3$
4. $\log_{x-2}\ 9 = 2$
5. $\log_{|x|}\ 16 = 4$
6. $23^x - 2 = 0$
7. $(2^x - 3)(3^x - 2)(6^x - 1) = 0$
8. $4^x - 9 \cdot 2^x + 14 = 0$
9. $49^x - 2 \cdot 7^x + 1 = 0$
10. $36^x - 2 \cdot 6^x = 0$
11. $36^x + 6^x - 6 = 0$
12. $5^x + 12 \cdot 5^{-x} = 7$
13. $\log_2 \log_3 x = 2$
14. $\log_3 \log_5 x = -1$

Risposte: (1) $\sqrt[4]{3}$, (2) 81, (3) 64 (4) 5, (5) ± 2, (6) $\log_{23} 2$, (7) $\log_2 3,\ \log_3 2,\ 0$, (8) $\log_2 7, 1$, (9) 0, (10) $\log_6 2$, (11) $\log_6 2$, (12) $\log_5 4, \log_5 3$, (13) 81, (14) $\sqrt[3]{5}$

Esercizio 108. Posto che $\log_a p = 2,\ \log_a m = 9,\ \log_a n = -1$ calcolare

1. $\log_a p^7$
2. $\log_{a^7} p$
3. $\log_{a^4} p^2 n^3$
4. $\log_{a^6} \dfrac{m^3 n}{p^6}$

Risposte: (1) 14, (2) $\frac{2}{7}$, (3) $\frac{1}{4}$, (4) $\frac{7}{3}$

Esercizio 109. Chi è più grande 3^{1000} o 5^{600}?
Risposta: 3^{1000}

Esercizio 110. Dimostrare che $\dfrac{1}{\log_2\ 36} + \dfrac{1}{\log_3\ 36} = \dfrac{1}{2}$

Esercizio 111. Quante cifre ha 11^{2000}?
Risposta: 2083

Esercizio 112. Dimostrare, senza calcolatrice, che $\log_3 \pi + \log_\pi 3 > 2$.

Esercizio 113. *Risolvere l'equazione*

$$4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$$

Esercizio 114. Risolvere l'equazione

$$5^{x-1} + 5\,(0,2)^{x-2} = 26$$

Esercizio 115. Risolvere l'equazione

$$25^x - 12 \cdot 2^x - (6,25)(0,16)^x = 0$$

Esercizio 116. Risolvere l'equazione

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x$$

Esercizio 117. Risolvere l'equazione

$$\log_4(x^2 - 6x + 7) = \log_4(x - 3)$$

Esercizio 118. Risolvere l'equazione

$$\log_3(2 - x) - \log_3(2 + x) - \log_3 x + 1 = 0$$

Esercizio 119. Risolvere l'equazione

$$2\log_4(2x) = \log_4(x^2 + 75)$$

Esercizio 120. Risolvere l'equazione

$$\log_2(2x) = \frac{1}{4}\log_2(x - 15)^4$$

Esercizio 121. Risolvere l'equazione

$$\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$$

Esercizio 122. Risolvere l'equazione

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9$$

Esercizio 123. Risolvere l'equazione

$$25^{\log_2 x} = 5 + 4x^{\log_2 5}$$

Esercizio 124. Risolvere l'equazione

$$x^{\log_{10} 2x} = 5$$

Esercizio 125. Risolvere l'equazione

$$|x - 3|^{(x^2 - 8x + 15)/(x-2)} = 1$$

Esercizio 126. Risolvere l'equazione

$$\log_{2x-1}\frac{x^4 + 2}{2x + 1} = 1$$

Esercizio 127. Risolvere l'equazione

$$\log_{3x} x = \log_{9x} x$$

Lezione 10

Esercizio 128. Vero o falso?.

1. $10 \equiv 8 \mod 2\pi$.
2. $-\frac{9\pi}{7} \equiv \frac{5\pi}{7} \mod 2\pi$.
3. $\frac{1}{\pi} \equiv \frac{2}{\pi} \mod 2\pi$.
4. $\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} \mod 2\pi$.
5. $\frac{-8\pi}{41} \equiv -\frac{500\pi}{41} \mod 2\pi$.
6. $x \in [-1; 0[$ quindi $\mathcal{C}\ (x)$ sta nel quadrante IV.

Risposte: F; V; F; F; V; V

Esercizio 129. Ridurre i seguenti numeri reali $\mod 2\pi$ e determinare il quadrante in cui la loro immagine mediante $\mathcal{C}$ cade.

1. $\dfrac{3\pi}{5}$;
2. $-\dfrac{3\pi}{5}$;
3. $\dfrac{7\pi}{5}$,;
4. $\dfrac{8\pi}{57}$;
5. $\dfrac{57\pi}{8}$;
6. $\dfrac{6\pi}{79}$;
7. $\dfrac{790\pi}{7}$;
8. 1;
9. 2;
10. 3;
11. 4;
12. 5;
13. 6;
14. 100;
15. $-3,14$;
16. $-3,15$

Risposte:

1. $\frac{3\pi}{5}$, quadrante II ;
2. $\frac{7\pi}{5}$, quadrante III ;
3. $\frac{7\pi}{5}$, quadrante III;
4. $\dfrac{8\pi}{57}$, quadrante I;
5. $\dfrac{9\pi}{8}$, quadrante III;
6. $\dfrac{6\pi}{79}$, quadrante I;
7. $\dfrac{6\pi}{7}$, quadrante II;
8. 1, quadrante I;
9. 2, quadrante II;
10. 3, quadrante II;
11. 4, quadrante III;
12. 5, quadrante IV;
13. 6, quadrante IV;
14. $100 - 30\pi$, quadrante IV;
15. $2\pi - 3.14$, quadrante III;
16. $2\pi - 3.15$, quadrante II

Esercizio 130. Dire quali elementi dell'insieme $\{\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z}\}$ appartengono all'intervallo

(i) $[0; \pi[$;

(ii) $[-\pi; 0[$.

Risposte:

(i) $\dfrac{3\pi}{20}, \dfrac{7\pi}{20}, \dfrac{11\pi}{20}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{19\pi}{20}$;

(ii) $-\dfrac{17\pi}{20}, -\dfrac{13\pi}{20}, -\dfrac{9\pi}{20}, -\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{20}$.

Esercizio 131. Provare che la congruenza modulo 2π è riflessiva, cioè, se $a \in \mathbb{R}$, allora $a \equiv a \mod 2\pi$.

Esercizio 132. Provare che la congruenza modulo 2π è simmetrica, cioè, se $a, b \in \mathbb{R}$, e se $a \equiv b \mod 2\pi$ allora $b \equiv a \mod 2\pi$.

Esercizio 133. Provare che la congruenza modulo 2π è transitiva, cioè, se $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora $a \equiv b \mod 2\pi$ e $b \equiv c \mod 2\pi$ implica $a \equiv c \mod 2\pi$.

Lezione 11

Esercizio 134. Scrivere nella forma $a \sin x + b \cos x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$A(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

Esercizio 135. Vero o Falso.

1. $\sin \frac{7\pi}{6} = 1/2$.
2. $\cos(\frac{\pi}{2} + 99) = \sin 99$.
3. $\cos(-1993) = \cos 1993$.
4. $\sin(-1993) = -\sin 1993$.
5. If $\sin x = 1$, then $x = \pi/2$.
6. $\cos(\cos \pi) = \cos(\cos 0)$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin 2x = 2 \sin x$.
8. $\exists x \in \mathbb{R}$ such that $\cos x = 2$.
9. $\exists x \in \mathbb{R}$ such that $\cos^2 x = \cos x^2$
10. $(\sin x + \cos x)^2 = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
11. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
12. $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
13. $\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
14. $-\frac{1}{2} \le \cos \frac{x}{2} \le \frac{1}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.
15. $1 \le -2 \cos \frac{x}{2} + 3 \le 5,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
16. $\exists A \in \mathbb{R}$ tale che l'equazione $\cos x = A$ ha esattamente 7 soluzioni reali.
17. $\cos^2 x - \sin^2 x = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

1. F;
2. F;
3. V;
4. V;
5. F;
6. V;
7. F;
8. F;
9. V;
10. F;
11. V;
12. V;
13. F;
14. F;
15. V;
16. F;
17. F.

Esercizio 136. Posto che $\sin t = -0.8$ e $\mathcal{C}\ (t)$ sta nel quarto quadrante, trovare $\cos t$.
Risposta: $\cos t = 0.6$

Esercizio 137. Posto che $\cos u = -0.9$ e $\mathcal{C}\ (u)$ sta nel secondo quadrante, trovare $\sin u$.
Risposta:
$\sin u = \sqrt{.19}$

Esercizio 138. Posto che $\sin t = \frac{\sqrt{7}}{5}$ e $\mathcal{C}\ (t)$ sta nel primo quadrante, trovare $\cos t$.
Risposta:
$\cos t = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

Esercizio 139. Posto che $\cos u = \frac{\sqrt{13}}{4}$ and $\mathcal{C}\ (u)$ sta nel terzo quadrante, trovare $\sin u$.
Risposta: $\sin u = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Esercizio 140. Usando il fatto che $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, trovare $\cos \frac{5\pi}{6}$ e $\sin \frac{5\pi}{6}$.
Risposta: $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Esercizio 141. Usando il fatto che $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, trovare $\cos \frac{3\pi}{4}$ and $\sin \frac{3\pi}{4}$.
Risposta: $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ and $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 142. Trovare $\sin(\dfrac{31\pi}{6})$ and $\cos(\dfrac{31\pi}{6})$.
Risposta: $\sin(\frac{31\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ e $\cos(\frac{31\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Esercizio 143. Trovare $\sin(\dfrac{20\pi}{3})$ e $\cos(\dfrac{20\pi}{3})$.
Risposta: $\sin(\frac{20\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(\frac{20\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

Esercizio 144. Trovare $\sin(\dfrac{17\pi}{4})$ e $\cos(\dfrac{17\pi}{4})$.
Risposta: $\sin(\frac{17\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos(\frac{17\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 145. Find $\sin(\dfrac{-15\pi}{4})$ and $\cos(-\dfrac{15\pi}{4})$.
Risposta: $\sin(\frac{-15\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ and $\cos(\frac{-15\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 146. Trovare $\sin(\dfrac{202\pi}{3})$ e $\cos(\dfrac{202\pi}{3})$.

Risposta: $\sin(\frac{202\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(\frac{202\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

Esercizio 147. Trovare $\sin(\dfrac{171\pi}{4})$ e $\cos(\dfrac{171\pi}{4})$.

Risposta: $\sin(\frac{171\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos(\frac{171\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
answer10

Esercizio 148. Se $|\sin\vartheta| < 1$ e $|\cos\vartheta| > 0$, provare che vale identicamente

$$\frac{\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta} + \frac{\cos\vartheta}{1+\sin\vartheta} = \frac{2}{\cos\vartheta}$$

Esercizio 149. Posto che

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

torvare $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ e $\sin\frac{3\pi}{5}$

Esercizio 150. Posto che $\cos\alpha + \sin\alpha = A$ e $\sin\alpha\cos\alpha = B$, provare che $A^2 - 2B = 1$

Esercizio 151. Posto che $\cos\alpha + \sin\alpha = A$ e $\sin\alpha\cos\alpha = B$, provare che $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = A - AB$.

Esercizio 152. Dimostrare che per ogni reale x, vale l'identità

$$(\sin x + 4\cos x)^2 + (4\sin x - \cos x)^2 = 17$$

Esercizio 153. Provare che $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ è una identità.

Esercizio 154. Dimostrare che

$$\sqrt{1 + 2\sin x\cos x} = |\sin x + \cos x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 155. Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2(\sin x\cos x)^2 = 1.$$

Esercizio 156. Provare, che se $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x,$$

e

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x.$$

Esercizio 157. Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3(\sin x\cos x)^2 = 1.$$

Esercizio 158. Dimostrare che

$$\frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1} = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tali che $\sin x + \cos x \neq 1$ e $\cos x \neq 0$.

Esercizio 159. Se $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ e $x \in]0;\pi[$, trovare $\cos x$ e $\sin x$.

Esercizio 160. Sapendo che $5\sin x + 12\cos x = 13$ dimostrare che $\sin x = \frac{5}{13}$ e $\cos x = \frac{12}{13}$

Esercizio 161. Vero o Falso.

1. $\arcsin \frac{\pi}{2} = 1$.
2. Se $\arccos x = -\frac{1}{2}$, allora $x = -\frac{\pi}{3}$.
3. Se $\arcsin x \geq 0$ then $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
4. $\arccos\ \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$.
5. $\arccos\ \cos(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$.
6. $\arcsin \frac{1}{2000} + \arccos \frac{1}{2000} = \frac{\pi}{2}$.
7. $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $\arcsin x > 1$.
8. $-1 \leq \arccos x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
9. $\sin \arcsin x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
10. $\arccos(\cos x) = x,\ \forall x \in [0; \pi]$.

Risposte: F; F; T; T; F; T; T; F; T; F

Esercizio 162. Trovare tutte le soluzioni reali di $2\sin x + 1 = 0$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.
Risposta: $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$

Esercizio 163. Risolvere
$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$
Risposta: $\{\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$

Esercizio 164. Risolvere
$$-2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0.$$
Risposta: $\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 165. *Dimostrare che*
$$\arccos\ x + \arccos(-x) = \pi, \quad \forall x \in [-1; 1],$$
$$\arcsin x = -\arcsin(-x), \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Esercizio 166. *Dimostrare che*
$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2},\ \forall x \in [0; 1],$$
$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2},\ \forall x \in [0; 1].$$

Lezione 12

Esercizio 167. Completare la tabella seguente.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
0	0	1	0	∞	1	∞	$\frac{\pi}{6}$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1	$\frac{2\pi}{3}$						
$\frac{3\pi}{4}$							$\frac{5\pi}{6}$						
π							$\frac{7\pi}{6}$						
$\frac{5\pi}{4}$							$\frac{4\pi}{3}$						
$\frac{3\pi}{2}$							$\frac{5\pi}{3}$						
$\frac{7\pi}{4}$							$\frac{11\pi}{6}$						
2π													

Esercizio 168. Vero o Falso.

1. $\tan x = \cot \frac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$ such that $\sec x = \frac{1}{2}$.
3. $\arctan 1 = \frac{\arcsin 1}{\arccos 1}$.
4. $x \mapsto \tan 2x$ ha periodo π.

Risposte: F; F; F; F

Esercizio 169. Sapendo che $\csc x = -1.5$ e $\mathcal{C}\ (x)$ sta nel quarto quadrante, calcolare $\sin x, \cos x$ and $\tan x$.
Risposte: $\sin x = -\frac{2}{3}, \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan x = -\frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

Esercizio 170. Sapendo che $\tan x = 2$ e $\mathcal{C}\ (x)$ sta nel terzo quadrante, calcolare $\sin x$ and $\cos x$.
Risposte: $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Esercizio 171. Sapendo che $\sin x = t^2$ e $\mathcal{C}\ (x)$ sta nel secondo quadrante, calcolare $\cos x$ e $\tan x$.
Risposte: $\cos x = -\sqrt{1-t^4}, \tan x = -\frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}$

Esercizio 172. Sia $x < -1$. Calcolare $\sin \operatorname{arcsec} x$ in funzione di x.
Risposta: $\sin \operatorname{arcsec} x = -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

Esercizio 173. Calcolare $\cos \arctan(-\frac{1}{3})$.
Risposta: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Esercizio 174. Calcolare $\arctan(\tan(-6))$, $\operatorname{arccot}(\cot(-10))$.
Risposte: $2\pi - 6$; $4\pi - 10$

Esercizio 175. Risolvere le seguenti equazioni.

1. $\sec^2 x - \sec x - 2 = 0$
2. $\tan x + \cot x = 2$
3. $\tan 4x = 1$
4. $2\sec^2 x + \tan^2 x - 3 = 0$
5. $2\cos x - \sin x = 0$
6. $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = 1$
7. $3\cot^2 x + 5\csc x + 1 = 0$
8. $2\sec^2 x = 5\tan x$
9. $\tan^2 x + \sec^2 x = 17$
10. $6\cos^2 x + \sin x - 5 = 0$

Esercizio 176. Dimostrare che se $x \in \mathbb{R}$ allora

$$\arctan x + \operatorname{arccot} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x),$$

dove $\operatorname{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ se $x > 0$, e $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Esercizio 177. Spiegare perché il grafico di $x \mapsto (\arctan \circ \tan)(x)$ è quello proposto a lezione

Esercizio 178. Sia $x \in]0;1[$. Provare che

$$\arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Esercizio 179. Sia $x \in]0;1[$. Provare che

$$\arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Esercizio 180. Sia $x > 0$. Provare che

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Esercizio 181. Sia $x > 0$.Provare che

$$\operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Esercizio 182. Provare le seguenti identità, assumendo, quando necessario, che le espressioni date siano ben definite.

i) $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

ii) $\tan^3 x + 1 = (\tan x + 1)(\sec^2 x - \tan x)$

iii) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{2 - 2\sin x} + \dfrac{1}{2 + 2\sin x}$

iv) $\dfrac{\sec\alpha \sin\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin^2\alpha$

v) $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$

vi) $7\sec^2 x - 6\tan^2 x + 9\cos^2 x = \dfrac{(1 + 3\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}$

vii) $\dfrac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} = \cos^2 t - \sin^2 t$

viii) $\dfrac{1 + \tan B + \sec B}{1 + \tan B - \sec B} = (1 + \sec B)(1 + \csc B)$

Esercizio 183. Risolvere l'equazione

$$\arccos x = \arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4}$$

Risposta: $x = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{15}}{12}$

Esercizio 184. Dimostrare l'identità

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

Esercizio 185. Scrivere usando una sola arcotangente

$$\arctan\frac{1}{3} - \arctan\frac{1}{4}$$

Risposta: $\arctan\frac{1}{13}$

Esercizio 186. Risolvere l'equazione $\cos x + \cos 3x = 0$.
Risposta: $x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Esercizio 187. Risolvere l'equazione

$$\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}.$$

Risposta: $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$

Esercizio 188. Determinare le costanti reali a, b, c In modo che

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = a\sin(bx + c).$$

Usare poi questo per risolvere l'equazione

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = -\sqrt{2}.$$

Esercizio 189. Risolvere l'equazione

$$\sin 2x + \cos 2x = -1$$

Esercizio 190. Risolvere l'equazione

$$\cos x - \sin x = 1.$$

Lezioni 13 e 14

Esercizio 191. Siano f, g continue da $[0;1]$ to $[0;1]$ tali che

$$\forall x \in [0;1] \qquad f(g(x)) = g(f(x)).$$

Dimostrare che f e g hanno un punto fisso comune in $[0;1]$.

Esercizio 192. Se una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + f(x)) = f(x),$$

dimostrare che f è costante.

Esercizio 193. Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia f continua in I. Supponiamo che per ogni $x \in I$, esiste $y \in I$ tale che

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$

Provare l'esistenza di un elemento $t \in I$ tale che $f(t) = 0$.

Esercizio 194. Determinare i valori di x per cui ognuna delle seguenti funzioni è continua:

1. $f(x) = x^5 + 4x^2$
2. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + 2x - 2}$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Esercizio 195. Per quali valori di a è f continua per ogni x?

1. $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{per } x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 5x - 1 & \text{per } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$

Esercizio 196. Dimostrare che ognuna delle seguenti *equazioni* ha almeno una radice nell'intervallo indicato:

1. $x^3 + 3x - 8 = 0$ in $]-2, 3[$
2. $x^6 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ in $]0, 1[$
3. $x^7 - 5x^5 + x^3 - 1 = 0$ in $]-1, 1[$
4. $\sqrt{x^2 + 1} = 3x$ in $]0, 1[$
5. $\sqrt{x^2 + 2} = 4x$ in $[0, 1]$.

Esercizio 197. Spiegare perché la funzione f definita per ogni $x \in [0, 5]$ da:

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + 2}$$

è dotata di massimo e di minimo. (*Non* tentare di calcolare questi valori)

Esercizio 198. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{per } x = \pm 1 \end{cases}$$

1. Disegnare il diagramma di $f(x)$. $f(x)$ assume massimo e minimo valore in $[-1, 1]$?
2. $f(x)$ è continua in $[-1, 1]$?

Esercizio 199. Sia $f : \,]0, \infty[\to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

1. Disegnare il diagramma di $f(x)$
2. Dimostrare che $f(x)$ raggiunge il massimo e il minimo valore in $]0, \infty[$.

Esercizio 200. Per ciascuna delle funzioni $f(x)$ seguenti riportate dimostrare che esiste l'inversa $f^{-1}(y)$, e trovare una formola per $f^{-1}(y)$. Studiare la continuità di $f^{-1}(y)$.

1. $f(x) = x + 1$
2. $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+4}$
5. $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

Esercizio 201. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^2 - x^4$. Dimostrare che esiste l'inversa f^{-1}, trovare una formola per $f^{-1}(y)$ e dire se tale funzione sia, o meno, continua.

Lezione 15

Esercizio 202. Usando la definizione dimostrare che la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ è $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Provare poi che per tutti i valori della variabile x per cui polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ è positivo la derivata della funzione $g(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ vale $g'(x) = \dfrac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Esercizio 203. Calcolare la derivata prima delle funzioni seguenti:

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 7$
3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = e^x + \ln x$
5. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{3}{x}$
6. $f(x) = x \ln x$
7. $f(x) = e^x \ln x$
8. $f(x) = \dfrac{8x^2 + 1}{x^3 - 8}$
9. $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{x + \sin x}$
10. $f(x) = \dfrac{-2}{\ln x}$
11. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$
14. $f(x) = xe^x$
15. $f(x) = e^{5x}$
16. $f(x) = e^{-x}$
17. $f(x) = e^{-2x}$
18. $f(x) = \cos x \, \sin x$
19. $f(x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{e^{3x} - 1}$
20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{x + 2}$
21. $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x + x}$
22. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Esercizio 204. Per ognuna delle seguenti funzioni stabilire se $f(x)$ è continua e differenziabile in $x = 0$:

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se}\, x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 2 & \text{se}\ x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{se}\ \ x \leq 0 \\ \ln\sqrt{1 + 4x} & \text{se}\ \ x > 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \ln(x + 3) & \text{se}\, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + 6x + 9}{18} & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$

Esercizio 205. Calcolare la derivata prima delle funzioni seguenti:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x} e^x$
2. $f(x) = \sqrt[3]{e^x \ln|x|}$
3. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
4. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 1}$
6. $f(x) = x\sqrt{e^{2x} + 1}$
7. $f(x) = \dfrac{\ln^2(2x + 1)}{x^3}$
8. $f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$
9. $f(x) = \ln \dfrac{ax + b}{cx + d}$
10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{ax + b}{cx + d}}$
11. $f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$
12. $f(x) = \sin \ln \cos x$
13. $f(x) = \ln \sin \sqrt{x}$

Lezione 16

Esercizio 206. Calcolare la derivata prima $f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0))$ se $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

Esercizio 207. Sia $f(x) = x + x^3 + x^7$ e sia $a > 0$. Allora $g'(y_a)$ dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione inversa di f e $y_a = a^{7/2} + a^{3/2} + \sqrt{a}$ vale:

1. $\dfrac{1}{3a^3 + 7a + 1}$
2. $\dfrac{1}{7a^3 + a + 1}$
3. $\dfrac{1}{7a^3 + 3a + 1}$
4. $\dfrac{1}{7a^3 - 3a + 1}$

Lezione 17

Esercizio 208. Per ognuna delle seguenti funzioni trovare i punti stazionari e determinare per quali valori di x essa è crescente o decrescente:

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
2. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$
3. $f(x) = x - e^x$
4. $f(x) = x + \ln x$.

Esercizio 209. Trovare imassimi e minimi per ognuna delle seguenti funzioni di x nell' intervallo specificato:

1. $f(x) = x^3 - 3x + 8$, $[-1, 2]$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 27}{x - 6}$, $[0, 5]$
3. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 27}$, $[-4, 4]$
4. $f(x) = (x-1)^3$, $[-1, 3]$
5. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$, $[-1, 3]$
6. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$, $]-\infty, \infty[$

Esercizio 210. Dimostrare, usando il Teorema di Rolle, che l'equazione $3x^2 - 2x + 1 = 0$ ha una radice in $[0; 1]$.

Esercizio 211. È data la funzione $f(x) = x^2 (x-1)^3$, $x \in [0, 1]$. Mostrare che esiste un unico punto $p \in]0, 1[$ in cui $f'(p) = 0$ e che questo punto divide l'intervallo $[0, 1]$ in due segmenti, tali che il rapporto fra le loro lunghezze sia $2/3$

Esercizio 212. Trovare i valori dei parametri a, $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) = 2x^2 - ax + b$ soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 1]$ indicando in quale punto dell'intervallo si annulli $f'(x)$

Esercizio 213. Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2}$
2. $f_2(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
3. $f_3(x) = \ln x^2 + 2 - x$
4. $f_4(x) = x - \frac{3}{5}\sqrt{1 + x^2}$
5. $f_5(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
6. $f_6(x) = (1 - 2x)\left(\ln(1 - 2x)\right)^2$

Esercizio 214. Sia $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{1 + x^2}$, $x \in [0, 1]$. Dire quanti e quali sono i punti in cui $f(x)$ verifica la tesi del Teorema di Rolle

Esercizio 215. Sia $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ derivabile con $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0;1]$. Provare che esiste $c \in [0;1]$ tale che

$$\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

Esercizio 216. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dimostrare che esistono n punti distinti $0 < a_0 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < 1$ tali che

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'(a_k) = n.$$

Esercizio 217. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dimostrare che esistono n punti distinti $0 < a_0 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < 1$ tali che

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f'(a_k)} = n.$$

Lezioni 18 e 19

Esercizio 218. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{12x+1}e^{-x}$:

1. determinare i suoi punti di massimi e minimo relativo
2. dimostrare che essa ha un solo punto di flesso x_φ

Esercizio 219. Dire se esistono valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x) = \big(2\,a + (a-2)\;x + x^2\big)\;e^{-x}$ è sia strettamente convessa che strettamente decrescente.

Esercizio 220. Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ abbia un flesso in $x = 1$

Esercizio 221. Determinare i valori di a, b, $c \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ abbia un punto stazionario in $(1;5)$ e un flesso in $(2;3)$

Esercizio 222. Determinare gli intervalli di convessità della funzione $f(x) = 2x^6 + 9x^5 + 10x^4 - 13x - 5$

Esercizio 223. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \ln(1+x^2) - \dfrac{a}{2}x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$?

Esercizio 224. Studiare la convessità della funzione $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + 7\arctan x - x$

Lezione 20

Esercizio 225. Tramite l'opportuno teorema di De L'Hospital calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{4x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^3-x^2+5x-5}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1-x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1-mx}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
11. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

13. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

14. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)}{(e^x-1)^2}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x(e^x-1)}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+2x}}{x}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2+e^{-3x}}{x}$

21. $\lim_{x\to 0} x\ln|x|$

22. $\lim_{x\to 0^{\pm}} xe^{\frac{1}{x}}$

23. $\lim_{x\to 0} x^p \ln x$, $p>0$

24. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

25. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^7+6x^2+3}{x^8+2x+7}$

26. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}-1}{x^{20}}$

Esercizio 226. Tramite l'opportuno teorema di De L'Hospital calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^8 x}{x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p x}{x}$, $p>0$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{17}}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p}$, $p>0$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}$
8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{e^x}$

Esercizio 227. Calcolare $\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n^4\right)\arccos\sin n$

Lezioni 21, 22, 23

Esercizio 228. Calcolare i seguenti integrali definiti

1. $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x}\,dx$
2. $\int_2^3 \frac{5}{2x}\,dx$
3. $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$
4. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x}\,dx$
5. $\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\,dx$
6. $\int_0^2 x\sqrt{x}\,dx$
7. $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$
8. $\int_0^1 5e^{-3x+6}\,dx$
9. $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$

Esercizio 229. Trovare tutte le funzioni primitive $F(x)$ tali che:

1. $F'(x)=-(x-1)^2$
2. $F'(x)=\frac{1}{2}-2x$
3. $F'(x)=4-x^2$ e $F(0)=1$.
4. $F'(x)=x(1-x^2)$ e $F(0)=\frac{1}{2}$
5. $F'(x)=e^{-x}+x^2$ e $F(0)=2$
6. $F'(x)=e^{2x}+x^3$ e $F(0)=2$

Esercizio 230. Se $F'(x)=x+1$ e $F(0)=2$, quanto vale $F(3)$?

Esercizio 231. Calcolare l'area sottesa al diagramma di $f(x)$ su $[a,b]$:

1. $f(x)=x^2+x$, $[a,b]=[1,3]$
2. $f(x)=(x+3)^2$, $[a,b]=[-4,-1]$
3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $[a,b]=[1,8]$
4. $f(x)=x+\sqrt{x}$, $[a,b]=[1,4]$
5. $f(x)=\sqrt{x}$, $[a,b]=[1,4]$
6. $f(x)=\sqrt[3]{x^7}$, $[a,b]=[1,2]$

Esercizio 232. Si consideri la regione chiusa $\mathcal{S}$ delimitata dalle curve assegnate, e dalle indicate parallele $x = a$, $x = b$ all'asse y. Fare prima un disegno di $\mathcal{S}$ e poi calcolarne l'area:

1. $y = x - x^2$, $y = -x$; $[0, 2]$
2. $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $[0, 1]$
3. $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $[0, 2]$
4. $y = x\left[x^2 - 1\right]$; $y = x$; $\left[-1, \sqrt{2}\right]$
5. $y = x$, $y = x^2 - 2x$; $[0, 2]$
6. $y = \dfrac{1}{x+1}$; $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; $[0, 1]$
7. $y = e^x$, $y = \ln x$; $[1, 2]$

Esercizio 233. Calcolare i limiti seguenti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^x \ln(t^2+1)e^{t^2} dt}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^x t^2 e^{t^2} dt}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{t} dt}{\ln x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{5x} t^8 \ln(3t^2+1) dt}{x^3}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{t} dt}{x^2}$

Esercizio 234. Mediante integrazione per parti calcolare:

1. $\displaystyle\int xe^x dx$
2. $\displaystyle\int x^2 e^x dx$
3. $\displaystyle\int x^3 e^x dx$
4. $\displaystyle\int xe^{-x} dx$
5. $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$
6. $\displaystyle\int x^3 e^{-x} dx$
7. $\displaystyle\int x \ln x\, dx$
8. $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$
9. $\displaystyle\int x^3 \ln x\, dx$
10. $\displaystyle\int \ln x\, dx$
11. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$
12. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
13. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
14. $\displaystyle\int xe^{2x} dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x}{e^{3x}} dx$
16. $\displaystyle\int 3x^2 e^{3x} dx$
17. $\displaystyle\int x \ln(x+1) dx$
18. $\displaystyle\int x^2 \ln(x+3) dx$
19. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-3)^3} dx$
20. $\displaystyle\int \frac{5x}{(x-1)^2} dx$
21. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^4} dx$
22. $\displaystyle\int x \sin(\pi x)\, dx$
23. $\displaystyle\int \arctan x\, dx$

Esercizio 235. Calcolare mediante opportuno cambio di variabili:

1. $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2} dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^{-x^2} dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^{50} x dx$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x-3}{x^2-3x-4} dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$
9. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+3} dx$
10. $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x+2} dx$
11. $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx$
12. $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
13. $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$
14. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$
15. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$
17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$
18. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x^3 e^{-x^2} dx$

19. $\int_0^1 \sqrt{8x+5}dx$ 20. $\int_0^1 \frac{5}{(2x+3)^2}dx$ 21. $\int_0^{1/2} \frac{1}{(4x-3)^3}dx$

Esercizio 236. Calcolare gli integrali:

1. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
4. $\int_3^4 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$
7. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$
10. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$
2. $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$
5. $\int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}dx$
8. $\int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx$
11. $\int_0^1 (11x+6)^7 dx$
3. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$
6. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$
9. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$
12. $\int_1^2 x^4 \ln x \, dx$

Esercizio 237. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte usando la scomposizione in frazioni parziali:

1. $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$
3. $\int \frac{x^3-2x+3}{x(x-1)}dx$
5. $\int \frac{x^4}{x^2-7x+10}dx$
7. $\int \frac{x^2}{x^2-5x+6}dx$
2. $\int \frac{10}{x^2-3x-4}dx$
4. $\int \frac{x^3-3x^2}{x^2-4}dx$
6. $\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx$
8. $\int \frac{x^3}{x^2-3x-4}dx$

Esercizio 238. Calcolare una primitiva della funzione $y = x\left(3x^2+4\right)^{-1}$

Esercizio 239. Calcolare una primitiva della funzione $y = \dfrac{4x\left(x^2+1\right)}{2x^4+2x^2+5}$

Esercizio 240. Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 \frac{3x}{x^2+1}dx$

Esercizio 241. Determinare un numero reale k ed una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali per cui risulti:

$$\int_1^x f(u)du = x\ln\left(x^2+1\right)+k$$

Esercizio 242. Calcolare una primitiva della funzione $y = \sinh(\ln x)$

Esercizio 243. Determinare tutti i valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ per i quali è crescente su $[2,5]$ la funzione:

$$f(x) = \int_2^x (u-\lambda)(u-2)\,du$$

Esercizio 244. Calcolare $\ell = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_1^x \left(e^{u-1}-1\right)du}{\int_1^x \ln u\,du}$

Esercizio 245. Si indichi con $A(m)$ l'area della parte di piano delimitata dalle curve di equazioni $y=x$, $y=x^m$, $x=0$ e $x=1$. Determinare per quali valori di $m\in\mathbb{R}$ si ha $A(m)=\frac{1}{3}$.

Esercizio 246. Si consideri la funzione $f:\left[0,\sqrt{3}\right]\to[1,10]$, $f(x)=x^2+1$. Dopo aver provato che f è invertibile calcolare:

$$\int_1^{10} f^{-1}(y)dy$$

Esercizio 247. Calcolare l'integrale definito $\int_0^{2\pi} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx$

Esercizio 248. Si indichi con $M(t)$ il valor medio integrale della funzione $f(x)=\frac{1}{x+4}$ nell intervallo $[0,t]$, $t>0$. Calcolare $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t)$

Esercizio 249. Determinare l'insieme A di tutti i valori del parametro reale positivo a per i quali vale 36 l'area della figura delimitata dall'asse x e dal grafico della parabola di equazione $y=x^2-(a-2)x-(a-1)$

Esercizio 250. Sia $f(x)=\displaystyle\int_1^{3x}\frac{1}{1+t+t^2}dt$.Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$.

Esercizio 251. Sia $f(x)=\displaystyle\int_0^{x}\frac{t^2-4}{1+\cos^2 t}dt$. Si trovino e si classifichino i massimi ed i minimi relativi di f.

Esercizio 252. Sia $f(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{2}\sqrt{t+1}dt$. Si calcoli $f'(x)$.

Esercizio 253. Calcolare $\displaystyle\int_{-3}^{4}||x|-4|\,dx$

Esercizio 254. Sapendo che $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=12$, $\displaystyle\int_0^6 f(x)dx=42$, si calcoli $\displaystyle\int_3^6 (f(x)-3)\,dx$

Esercizio 255. Risolvere e discutere l'equazione $\displaystyle\int_0^1 t^x dt=5$

Esercizio 256. Provare che $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{4x^2-8x+1}{(x-1)^2}dx=\frac{5}{2}$

Esercizio 257. Provare che $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3(2x)\cos^4(2x)dx=\frac{1}{35}$

Esercizio 258. Provare che $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^3 x dx=\frac{1}{12}$

Esercizio 259. Provare che $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{x+1}{x+2}dx=\ln\frac{16}{27}$

Esercizio 260. Provare che $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin 2x dx=\frac{2}{5}\left(1+e^{-\pi/2}\right)$

Esercizio 261. Provare che $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

Esercizio 262. Provare che $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+5x^2}dx=\frac{2\sqrt{6}}{5}-\frac{1}{15}$

Esercizio 263. Provare che $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{2+x^3}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

Esercizio 264. Provare che: $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=3-2\sqrt{2}$

Esercizio 265. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{4+x^2}dx$

Esercizio 266. Calcolare $\displaystyle\int_1^3\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$

Esercizio 267. Calcolare $\displaystyle\int_1^9\frac{3x}{\sqrt{10-x}}dx$

Esercizio 268. Calcolare $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$

Esercizio 269. Calcolare $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$

Esercizio 270. Si ponga $\mathcal{I}_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}$, essendo $a \in \mathbb{R}$ un fissato reale. Si dimostri che per $n \geq 2$ vale:

$$n\,\mathcal{I}_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a2} - (n-1)a^2\mathcal{I}_{n-2}(x). \qquad (*)$$

Si usi $(*)$ per dimostrare che:

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^2+5}}dx = \frac{168}{5} - 40\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Esercizio 271. Dalla relazione $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}dt$, dedurre, mediante opportune sostituzioni l'identità:

$$\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$$

Esercizio 272. Dimostrare che, per ogni $x > 0$ vale $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$

Esercizio 273. Sia $\mathcal{F}(x; m, n) = \int_0^x t^m(1+t)^n dt$, m, $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

$$(m+1)\mathcal{F}(x; m, n) + n\mathcal{F}(x; m+1, n-1) = x^{m+1}(1+x)^n \qquad (**)$$

Si usi $(**)$ per calcolare $\mathcal{F}(x; 10, 2)$

Esercizio 274. Studiare la funzione $f(x) := \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t\ln t}$ per $x \in [0, \infty[$, tracciandone un grafico approssimativo

Esercizio 275. Calcolare

1. $\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-nx^2}dx$
2. $\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xe^{-nx^2}dx$

Esercizio 276. Sia $\alpha > 0$ fissato: calcolare $\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\,dx$

Esercizio 277. Trovare delle costanti a, $b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$

Esercizio 278. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ per cui risulti, per ogni $x \geq 0$ $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2+x+1$. Calcolare $f\,(2)$

Esercizio 279. Calcolare gli integrali:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$
2. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

Esercizio 280. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ per cui risulti, per ogni $x \geq 0$ $\int_0^{3x} f(t)dt = \sin x + \cos x$. Calcolare $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Esercizio 281. Se $\sqrt{3} < a < b$ si calcoli $\int_a^b \frac{x}{x^4-4x^2+3}dx$. È suggerita la sostituzione $x^2 = t$

Esercizio 282. Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(x^2t)}{1+\sin^2(x^2t)}dt$

Esercizio 283. Calcolare gli integrali:

1. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x-2}+3}dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}dx$

Esercizio 284. Sia $0 < x < 1$. Calcolare $\displaystyle\int_0^x t^2 \ln \sqrt{1-t}dt$ e successivamente si calcoli $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \int_0^x t^2 \ln \sqrt{1-t}dt$

Esercizio 285. Determinare il dominio naturale della funzione $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{x-s}$

Esercizio 286. Si consideri la scrittura $\displaystyle\int_b^x \frac{a}{t+b} = \ln(x+1)^2 + 5$. Per quali valori di a, $b \in \mathbb{R}$ può essere vera?

Esercizio 287. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\,(1+\cos x)\sin(2x) + 8\sin x}{2\cos x\left(3 + 2\cos x - \sin^2 x\right)}\,dx$