Si ringrazia il prof. Juan Gabriel Brida dell'Università di Bolzano

# 1 DIFFERENZIAZIONE

1. Calcolate la *derivata* prima delle funzioni seguenti:

   (a) $f(x) = x + 2$
   (b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 7$
   (c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$
   (d) $f(x) = e^x + \ln x$
   (e) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{3}{x}$
   (f) $f(x) = x \ln x$
   (g) $f(x) = e^x \ln x$
   (h) $f(x) = \dfrac{8x^2+1}{x^3-8}$
   (i) $f(x) = \sqrt[3]{x} e^x$
   (j) $f(x) = \dfrac{-2}{\ln x}$
   (k) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$
   (l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2. Calcolate la derivata delle funzioni seguenti:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+1}$
   (b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
   (c) $f(x) = \sqrt{e^{2x}+1}$
   (d) $f(x) = x\sqrt{e^{2x}+1}$
   (e) $f(x) = \dfrac{\ln^2(2x+1)}{x^3}$
   (f) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}-1}{e^{3x}-1}$
   (g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{x+2}$
   (h) $f(x) = \sqrt[3]{e^x \ln|x|}$
   (i) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

3. Per ognuna delle seguenti funzioni-diversamente definite a seconda del segno di $x$- stabilire se $f(x)$ è continua e differenziabile in $x = 0$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \geq 0 \\ 2x^2-x-2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln\sqrt{1+4x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+3) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2+6x+9}{18} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

4. Per ognuna delle seguenti funzioni trovare i *punti stazionari* , e determinare per quali valori di $x$ essa è crescente o decrescente:

   (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
   (b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$
   (c) $f(x) = x - e^x$
   (d) $f(x) = x + \ln x$.

5. Trovare i *massimi e minimi* per ognuna delle seguenti funzioni di $x$ nell' intervallo specificato:

   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 8$ $[-1, 2]$.
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$ $[0, 5]$
   (c) $f(x) = (x-1)^3$ $[-1, 3]$
   (d) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ $[-1, 3]$
   (e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+27}$ $[-4, 4]$
   (f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^4+1}$ $]-\infty, +\infty[$

6. Decidere per quali valori di $x$ le seguenti funzioni sono *convesse* e determinare gli eventuali *punti di flesso*:

   (a) $f(x) = x^4$
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
   (d) $f(x) = x^2 e^x$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{2}{3}x$
   (f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
   (g) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
   (h) $f(x) = 2x - 3 + 4\ln|x|$
   (i) $f(x) = -2x + e^{-x}$

7. Per ogni $f(x)$: (i) trovare i valori *estremanti* di $x$ in corrispondenza a cui $f$ ha massimo/minimo locale, determinando dove essa è crescente/decrescente; (ii) decidere dove è convessa/concava e determinare gli eventuali punti di flesso:

   (a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 4$
   (b) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 7$
   (c) $f(x) = x^3 - 4x + 16$

8. Determinare quale delle seguenti funzioni $f(x)$è dotata di *inversa*, e, in caso affermativo, rappresentare sullo stesso diagramma $f$ ed $f^{-1}$:

   (a) $f(x) = 2x + 3$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = x^4$
   (d) $f(x) = x^5$
   (e) $f(x) = x^2 + 2x + 1, x > 0$
   (f) $f(x) = e^{x-1}$
   (g) $f(x) = \log(x^2), x \neq 0$
   (h) $f(x) = \sqrt{x^2-1}, -1 \leq x \leq 1$

9. Dimostrare che la funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ da: $f(x) = x^7 + x^3 - 3x^2 + 3x + 9$ è invertibile.

## 2 REGOLA DI DE L'HOSPITAL BERNOULLI

Tramite la *regola di De L'Hospital Bernoulli* calcolare i limiti delle seguenti *forme indeterminate*:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{4x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^3-x^2+5x-5}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1-mx}{x^2}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
11. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
12. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
13. $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$
14. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)}{(e^x-1)^2}$
17. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x(e^x-1)}$
18. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+2x}}{x}$
19. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$
20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2+e^{-3x}}{x}$
21. $\lim_{x\to 0} x\ln|x|$
22. $\lim_{x\to 0^\pm} xe^{\frac{1}{x}}$
23. $\lim_{x\to 0} x^p \ln x$, $p>0$
24. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$
25. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^7+6x^2+3}{x^8+2x+7}$
26. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^{x^2}-1}{x^{20}}$
27. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$
28. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^8 x}{x}$
29. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^p x}{x}$, $p>0$
30. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
31. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{17}}$
32. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p}$, $p>0$
33. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$
34. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{e^x}$

## 3 INTEGRAZIONE

1. Calcolare i seguenti *integrali indefiniti*:

   (a) $\int x^{12}dx$
   (b) $\int(-x^2+x-7)dx$
   (c) $\int \frac{1}{3x}dx$
   (d) $\int \frac{x^2+5x+2}{\sqrt{x}}dx$
   (e) $\int (x-2)^3\,dx$
   (f) $\int x\sqrt[3]{x}dx$
   (g) $\int \frac{x}{x+1}dx$
   (h) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$
   (i) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}dx$
   (j) $\int \frac{x^3}{x+1}dx$
   (k) $\int \frac{x^2-4x+4}{x}dx$
   (l) $\int \sqrt{x-1}dx$
   (m) $\int \frac{-5}{3x^3}dx$
   (n) $\int (x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx$
   (o) $\int \frac{4}{3x+7}dx$
   (p) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
   (q) $\int e^{-2x}dx$
   (r) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$
   (s) $\int \left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)dx$
   (t) $\int \frac{2x+5}{x+1}dx$
   (u) $\int \frac{x^2-4x+4}{x-2}dx$
   (v) $\int \frac{(x+2)^2}{x-2}dx$
   (w) $\int \frac{x^4+4}{x+1}dx$
   (x) $\int \frac{x^3-4x^2+3}{x-3}dx$

2. Calcolare i seguenti *integrali definiti*:

   (a) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x}dx$
   (b) $\int_2^3 \frac{5}{2x}dx$
   (c) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$
   (d) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$
   (e) $\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}dx$
   (f) $\int_0^2 x\sqrt{x}dx$
   (g) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$
   (h) $\int_0^1 5e^{-3x+6}dx$
   (i) $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$

(j) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ (k) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (l) $\int_1^1 \sqrt{x^2-1}dx$

3. Trovare tutte le *funzioni primitive* $F(x)$ tali che:

   (a) $F'(x) = -(x-1)^2$
   (b) $F'(x) = \frac{1}{2} - 2x$
   (c) $F'(x) = 4 - x^2$ e $F(0) = 1$.
   (d) $F'(x) = x(1-x^2)$ e $F(0) = \frac{1}{2}$
   (e) $F'(x) = e^{-x} + x^2$ e $F(0) = 2$

4. Se $F'(x) = x + 1$ e $F(0) = 2$, quanto vale $F(3)$?

5. Sia $a > 1$, e si considerino le due funzioni $f(x) = a^x$e $g(x) = x^a$. Si calcolino: $\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dx}, \int f(x)dx, \int g(x)dx$.

6. Calcolare l'*area sottesa al diagramma* di $f(x)$ su $[a,b]$:

   (a) $f(x) = x^2 + x$, $[a,b] = [1,3]$
   (b) $f(x) = (x+3)^2$, $[a,b] = [-4,-1]$
   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[a,b] = [1,8]$
   (d) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[a,b] = [1,4]$
   (e) $f(x) = \sqrt{x}$, $[a,b] = [1,4]$
   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$, $[a,b] = [1,2]$

7. Si consideri la regione chiusa $S$ delimitata dalle curve assegnate, e dalle indicate parallele $[x = a, x = b]$ all'asse $y$. Fare prima un disegno di $S$ e poi calcolarne l'area:

   (a) $y = x - x^2$, $y = -x$; $[0,2]$
   (b) $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $[0,1]$
   (c) $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $[0,2]$
   (d) $y = x\left[x^2-1\right]$; $y = x$; $\left[-1, \sqrt{2}\right]$
   (e) $y = x$, $y = x^2 - 2x$; $[0,2]$
   (f) $y = \frac{1}{x+1}$; $y = \frac{x^2}{x+1}$; $[0,1]$
   (g) $y = e^x$, $y = \ln x$; $[1,2]$

8. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni di $x$:

   (a) $\frac{d}{dx}\int_0^x t^2 dt$
   (b) $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2} dt$
   (c) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x e^{-t^2} dt$
   (d) $\frac{d}{dx}\int_0^x \left(1+t^2\right)^{-3} dt$
   (e) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \left(1+t^2\right)^{-3} dt$
   (f) $\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt$

9. Calcolare i limiti seguenti:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^x \ln(t^2+1)e^{t^2} dt}{x}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^x t^2 e^{t^2} dt}{x}$
   (d) $\lim_{x\to \infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{t} dt}{\ln x}$
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{5x} t^8 \ln(3t^2+1) dt}{x^3}$
   (f) $\lim_{x\to \infty} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{t} dt}{x^2}$

# 4 Ulteriori aspetti dell' integrazione

1. Mediante *integrazione per parti* calcolare:

   (a) $\int xe^x dx$
   (b) $\int x^2 e^x dx$
   (c) $\int x^3 e^x dx$
   (d) $\int xe^{-x} dx$
   (e) $\int x^2 e^{-x} dx$
   (f) $\int x^3 e^{-x} dx$
   (g) $\int x \ln x \, dx$
   (h) $\int x^2 \ln x \, dx$
   (i) $\int x^3 \ln x \, dx$
   (j) $\int \ln x \, dx$
   (k) $\int \frac{\ln x}{x} dx$
   (l) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
   (m) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
   (n) $\int xe^{2x} dx$
   (o) $\int \frac{x}{e^{3x}} dx$
   (p) $\int 3x^2 e^{3x} dx$
   (q) $\int x \ln(x+1) dx$
   (r) $\int x^2 \ln(x+3) dx$
   (s) $\int \frac{2x}{(x-3)^3} dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{5x}{(x-1)^2}dx$ (u) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^4}dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ (w) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}dx$

2. *Integrazione per sostituzione.* Calcolare gli integrali:

- $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x^3e^{x^4}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^2+1)^{50}xdx$
- $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{2x-3}{x^2-3x-4}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+2}dx$
- $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x}dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$
- $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{1}{x\ln x}dx$
- $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}dx$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{8x+5}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{(2x+3)^2}dx$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(4x-3)^3}dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$
- $\displaystyle\int_3^4 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^5e^{-x^2}dx$
- $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$
- $\displaystyle\int_0^1 (11x+6)^7\,dx$
- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\ln x\,dx$

3. Dimostrare che, se $\alpha \neq \beta$, allora per ogni $x \neq \alpha$ e $x \neq \beta$ risulta:

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{a\alpha+b}{x-\alpha} - \frac{a\beta+b}{x-\beta}\right)$$

4. Usare la identità dell'esercizio precedente per calcolare i seguenti *integrali di funzioni razionali fratte*:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{10}{x^2-3x-4}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+3}{x(x-1)}dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2}{x^2-4}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x^4+5x^2+3}{x^2-7x+10}dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2-5x+6}dx$

5. Calcolare, se possibile i seguenti *integrali impropri*:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x}dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{x}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

(l) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ (m) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$ (n) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ (o) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{7x}dx$ (p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

(q) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$ (r) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ (s) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ (t) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^5+1)^{-20}x^4dx$ (u) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-x^4}dx$