Appunti di Matematica Clea dispari

Daniele Ritelli*

24 novembre 2004

1 Derivate: generalità

Consideriamo una funzione reale di una variabile reale $f : I \to \mathbb{R}$, ove I è un intervallo.

Diremo che f è derivabile in $x_0 \in I$ se esiste **finito** il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.1}$$

Il valore del limite (1.1) si indica con uno dei simboli:

$$f'(x_0), \dot{f}(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$$

Se per ogni $x_0 \in I$ esiste il limite (1.1) la funzione f è detta derivabile in I e la funzione:

$$x \longmapsto f'(x)$$

si dice **funzione derivata** o, più semplicemente, **derivata** di f.

Si osservi che (1.1) si può anche scrivere, ponendo $h = x - x_0$, come:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Teorema 1. *Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| .$$

D'altra parte, per ipotesi:

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(x_0)| ,$$

quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| &= \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot \lim_{x \to x_0} |x - x_0| \\ &= |f'(x_0)| \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

*Versione riservata agli studenti frequentanti dell'anno accademico 2004-2005 da non diffondere senza il consenso dell'autore.

La derivabilità implica la continuità ma non viceversa, nel senso che esistono funzioni continue che non sono derivabili. Ad esempio la funzione:

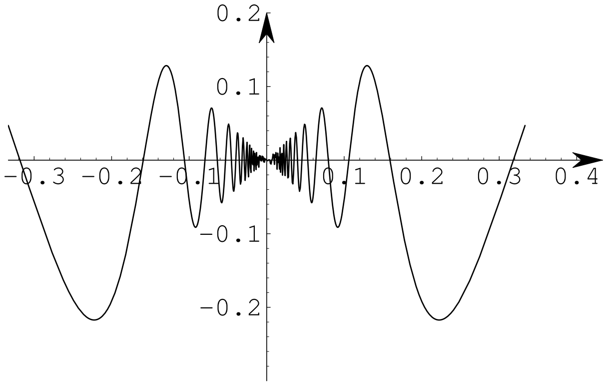
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

è continua nell'origine, ma non è derivabile nell'origine. Infatti:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x},$$

ma, evidentemente

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \nexists$$



Teorema 2. *Se f e g sono due funzioni derivabili in $x_0 \in I$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:*

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot f)'(x_0) &= \alpha \cdot f'(x_0) \\
(f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\
(f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha \cdot f(x) - \alpha \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \cdot f'(x_0).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= f'(x_0) + g'(x_0)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)+f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)\right]$$
$$=g'(x_0)\cdot f(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

□

Teorema 3. *Se f è derivabile in $x_0\in I$, e $f(x_0)\neq 0$, allora:*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)\cdot(x-x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)}\right]\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)}\\
&= -f'(x_0)\cdot\frac{1}{[f(x_0)]^2}
\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Se Se f e g sono due funzioni derivabili in $x_0\in I$, e $g(x_0)\neq 0$, allora:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Dimostrazione. Basta applicare la regola per la derivazione del prodotto alla funzione $f\cdot h$ con:

$$h(x)=\frac{1}{g(x)}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
(f\cdot h)'(x_0) &= f'(x_0)\cdot h(x_0)+f(x_0)\cdot h'(x_0)=\\
&= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}-f(x_0)\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\\
&= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}
\end{aligned}$$

□

2 Risultati fondamentali

Definizione 1. Se $f : I \to \mathbb{R}$, il punto $x_0 \in I$ è detto punto di massimo relativo per f se esiste un numero reale positivo δ tale per cui $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ e per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si ha $f(x_0) \geq f(x)$.

Naturalmente x_0 è un minimo relativo per f se x_0 è massimo relativo per $-f$.

Teorema (Fermat). *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile nel punto x_0 di massimo relativo e se x_0 è interno all'intervallo I allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Fissiamo un arbitrario elemento $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Ora il segno della frazione:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è positivo se $x < x_0$ ed è negativo per $x > x_0$. Pertanto:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

mentre:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

L'potesi di derivabilità implica

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0),$$

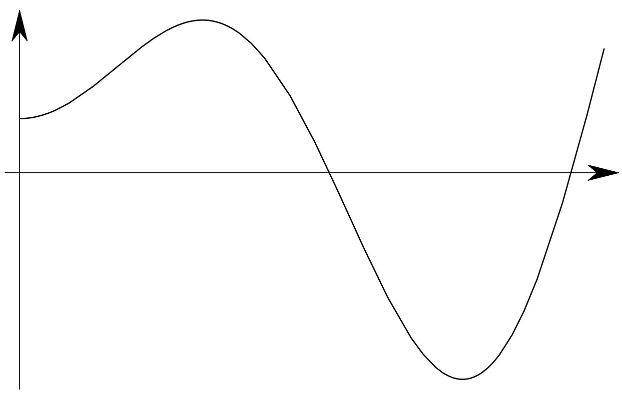
da cui si desume:

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Ovviamente si ha un enunciato analogo per per un punto di minimo relativo interno.

Teorema (Rolle, 1690). *Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e se esistono, $a, b \in I$, $a < b$, per cui si abbia $f(a) = f(b)$, esiste almento un elemento $x \in]a, b[$ tale che $f'(x) = 0$*



Dimostrazione. Se f non è una funzione costante, caso in cui, come si vedr? fra breve, la tesi segue banalmente, possiamo supporre che f assuma, ad esempio massimo assoluto, in un punto interno $x_M \in]a, b[$, ma in tale punto, sappiamo dal Teorema di Fermat che $f'(x_M) = 0$. □

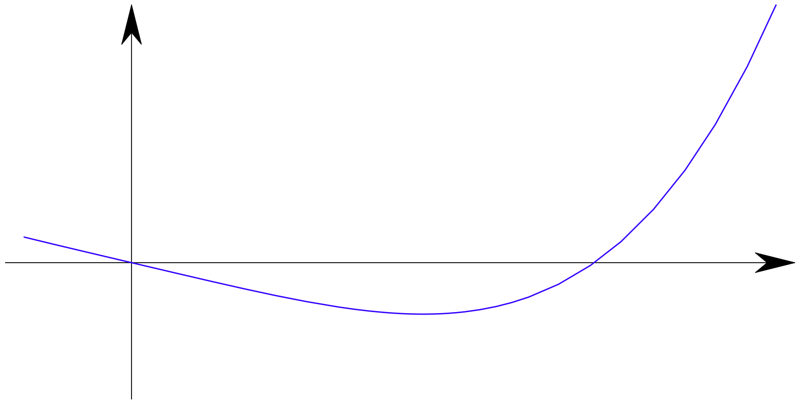
Teorema (Lagrange, 1797). *Se $f : [a, b] \to R$ è una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ si ha che esiste un elemento $\overline{x} \in]a, b[$ tale che:*

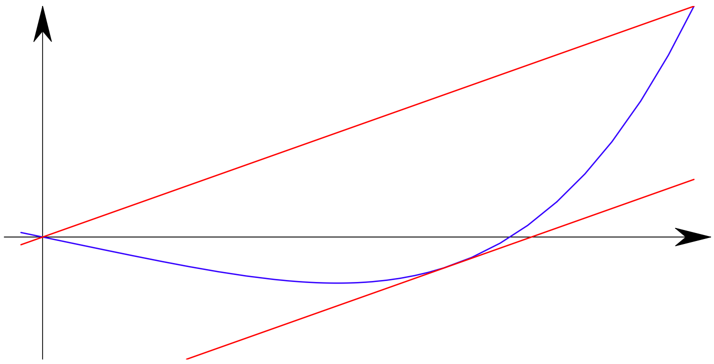
$$f(b) - f(a) = f'(\overline{x})(b - a);$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione $\varphi(x)$, definita per $\in \,]a, b[$ da:

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))\, x - (b - a)\, f(x).$$

Si vede che $\varphi(b) = \varphi(a)$, quindi esiste, per il teorema di Rolle un elemento $\overline{x} \in \,]a, b[$ tale che $\varphi'(\overline{x}) = f(b) - f(a) - (b - a)\, f'(\overline{x}) = 0$. $\square$





Teorema (Cauchy, 1821). *Se $f, g : [a, b] \to R$ sono funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$ si ha che esiste un elemento $\overline{x} \in \,]a, b[$ tale che:*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(\overline{x}) = [g(b) - g(a)]\, f'(\overline{x});$$

Dimostrazione. Basta prendere:

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x).$$

$\square$

La formulazione originale del Teorema di Cauchy del 1821 in *Cours d'analyse algébrique, Oeuvres série 2, vol III.* era in effetti la seguente:

Teorema (Cauchy, 1821, forma originale). *Se $f,\ g : [a, b] \to R$ sono funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$ e se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$ si ha che esiste un elemento $\overline{x} \in \,]a, b[$ tale che:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})}.$$

2.1 Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema 5. *Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange sappiamo che esiste $x \in]x_1, x_2[$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1)$$

Per ipotesi $f'(x) > 0$, d'altra parte anche $x_2 - x_1 > 0$, quindi $f(x_2) > f(x_1)$. □

Il teorema 5 fornisce il metodo per la ricerca dei massimi e minimi relativi di una funzione derivabile. Infatti:

$$f'(x) > 0 \text{ per } x > x_0 \text{ e } f'(x) < 0 \text{ per } x < x_0 \rightarrow x_0 \text{ è un minimo relativo}$$
$$f'(x) < 0 \text{ per } x > x_0 \text{ e } f'(x) > 0 \text{ per } x < x_0 \rightarrow x_0 \text{ è un massimo relativo}$$

Teorema (della derivata nulla). *Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Si ha, per il teorema di Lagrange, che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1) = 0$$

dunque f è costante. □

Teorema (della primitiva). *Se $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora esiste un numero reale c tale per cui*

$$f(x) = g(x) + c.$$

3 Derivate delle principali funzioni

- Funzione stazionaria

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

Infatti, se $h \neq 0$, si ha, per ogni x:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

quindi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

- Funzione monomia

$$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}\rightarrow f'(x)=nx^{n-1}. \tag{3.1}$$

Infatti se $n=1$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1,$$

quindi:

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}1=1$$

Se $n=2$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{2hx+h^2}{h}\\ &= 2x+h\end{aligned}$$

quindi:

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}(2x+h)=2x$$

Infine, ragionando per induzione si trova la formula 3.1 usando il teorema della derivazione del prodotto. Infatti ammesso che 3.1 valga per un certo $n\in\mathbb{N}$ abbiamo

$$\begin{aligned}D\left(x^{n+1}\right) &= D\left(x^n\cdot x\right)\\ &= D\left(x^n\right)\cdot x+x^nD\left(x\right)\\ &= nx^{n-1}\cdot x+x^n\\ &= nx^n+x^n\\ &= (n+1)\,x^n\end{aligned}$$

- Funzione esponenziale di base e:

$$f(x)=e^x\rightarrow f'(x)=e^x$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= \frac{e^xe^h-e^x}{h}\\ &= \frac{e^h-1}{h}e^x,\end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^h-1}{h}\cdot e^x=1\cdot e^x=e^x$$

- Funzione esponenziale di base qualunque

$$f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \cdot \ln a.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\
&= \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\
&= a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}
\end{aligned}$$

quindi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = a^x \cdot \ln a$$

- Funzione logaritmo naturale:

$$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \\
&= \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \\
&= \ln \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \ln \left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln \left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

- Funzione seno

$$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$$

infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} \\
&= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \frac{2x+h}{2}
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}\\
&= 1\cdot\cos x\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

- Funzione coseno

$$f(x)=\cos x \to f'(x) = -\sin x$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \frac{-2\sin\dfrac{x+h-x}{2}\sin\dfrac{x+h+x}{2}}{h}\\
&= -\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}\\
&= -1\cdot\sin x\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

- Funzione tangente

$$f(x)=\tan x \to f'(x) = 1+\tan^2 x$$

Qui, anziché usare la definzione diretta, si può applicare la regola di derivazione del quoziente:

$$\begin{aligned}
D\left(\tan x\right) &= D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x
\end{aligned}$$

4 I teoremi di Cauchy sulle equazioni funzionali

4.1 Scindibilità additiva

Si dirà che una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è *scindibile additivamente* se per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ vale:

$$f\left(x+y\right) = f(x)+f(y) \tag{4.1}$$

Chiaramente ogni funzione del tipo $f(x)=\lambda\cdot x$, in cui λ è un fissato numero reale, verifica la proprietà di scindibilità. Il nostro problema è vedere se tale tipo di struttura sia o meno la sola possibile. Come vedremo la risposta è affermativa: non esistono, sotto opportune ipotesi, funzioni additivamente scindibili che non siano della forma $f(x)=\lambda\cdot x$.

Teorema 6 (Cauchy, 1821). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valga* (4.1)*. Esiste allora $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$f(x) = \lambda \cdot x \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Se si pone $x = y = 0$ si trova per (4.1) $f(0+0) = f(0)+f(0)$, ma essendo ovviamente $0+0 = 0$ si ha $f(0) = f(0) + f(0)$ da cui $f(0) = 0$. Poi, derivando l'uguaglianza (4.1) rispetto a x troviamo, per ogni $y \in \mathbb{R}$:

$$f'(x + y) = f'(x).$$

Quest'ultima significa che f' è una funzione costante e quindi che f è una funzione del tipo $f(x) = \lambda \cdot x + \mu$. Dovendo essere $f(0) = 0$ si ottiene subito $\mu = 0$ e, dunque $f(x) = \lambda \cdot x$. □

4.2 Scindibilità moltiplicativa

Dal teorema 6 sulla scindibilità additiva non è difficile ottenere un risultato sulla scindibilità moltiplicativa di funzioni reali, cioè funzioni verificanti l'identità funzionale:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y). \tag{4.3}$$

Teorema 7 (Cauchy). *Sia f continua e non identicamente nulla tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valga* (4.3)*. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale:*

$$f(x) = e^{c \cdot x}.$$

Dimostrazione. Iniziamo osservando che se esiste una soluzione di (4.3) che si annulla in un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale funzione coincide con la funzione identicamente nulla e quindi risolve l'equazione funzionale in modo triviale. Questo significa inoltre che ogni altra soluzione di (4.3) non si annulla in alcun $x \in \mathbb{R}$. Se infatti $f(\bar{x}) = 0$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$f(x) = f(x - \bar{x} + \bar{x}) = f(x - \bar{x}) \cdot f(\bar{x}) = 0.$$

Se, adesso, supponiamo esista una soluzione non banale f dell'equazione funzionale (4.3), allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che:

$$f(2x) = f(x + x) = [f(x)]^2 > 0. \tag{Po}$$

La formula (Po) mostra che le soluzioni non banali dell'equazione funzionale (4.3)) sono **strettamente** positive. Possiamo pertanto calcolare il logaritmo naturale dei due lati di (4.3) per concludere che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, vale:

$$\ln\Big[f(x + y)\Big] = \ln\Big[f(x) \cdot f(y)\Big] = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Allora la funzione $g(x) = \ln f(x)$ è soluzione dell'equazione funzionale additiva (4.1), così, per teorema 6 abbiamo l'esistenza di un reale positivo δ per cui vale:

$$\ln f(x) = \delta \cdot x.$$

Passando all'esponenziale, ponendo $\lambda = e^{\delta}$, otteniamo la tesi. □

5 Teorema di Darboux

Se $f : I \to \mathbf{R}$ è una funzione derivabile non si può, a priori dedurre che la derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ sia continua.
Ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in ogni punto. La sua derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è una funzione continua nell'origine.

Nonostante non si possa a priori dire che la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ sia continua, f' mantiene la proprietà dei valori intermedi.

Teorema (di Darboux). *Se $f : I \to \mathbf{R}$ è una funzione derivabile, presi $a, b \in I$ tali che $a < b$ e che $f'(a) < f'(b)$, allora per ogni reale k tale che $f'(a) < k < f'(b)$ esiste almeno un punto $x \in]a, b[$ tale per cui $f'(x) = k$*

Dimostrazione. Si ponga $g(x) = f(x) - kx$. La funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema di Weierstraß nell'intervallo $[a, b]$. Indichiamo con x_m un punto di minimo per g e, siccome $g'(a) = f'(a) - k < 0$ e $g'(b) = f'(b) - k > 0$ tale punto di minimo deve essere interno all'intervallo, dunque, per il Teorema di Fermat deve essere:

$$g'(x_m) = 0,$$

dunque:

$$f'(x_m) = k,$$

come volevasi. □

Corollario 1. *La funzione f' non può discontinuità di tipo salto in $]a, b[$*

Corollario 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ è che si abbia $f'(x) > 0$ oppure $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a, b[$*

6 Derivata della funzione composta e della funzione inversa

Teorema (derivata della funzione composta). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I e sia $g : J \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in J tale per cui per ogni $x \in J$ si abbia $g(x) \in I$ in modo che sia ben definita la funzione $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Allora la funzione φ è derivabile per ogni $x \in J$ e si ha:*

$$\varphi'(x) = (f \circ g)'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

Dimostrazione. Prendiamo $h \neq 0$ e consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \tag{6.1}$$

Per il Teorema di Lagrange abbiamo che:

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = [g(x+h) - g(x)] \cdot f'(g(x) + \vartheta \cdot g(x+h))$$

ove ϑ è un opportuno numero reale per cui $|\vartheta| < 1$. Se $h \to 0$ si ha che $g(x) + \vartheta \cdot g(x+h) \to g(x)$, quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \cdot f'(g(x) + \vartheta \cdot g(x+h)) \\ &= g'(x) \cdot f'(g(x)) \end{aligned}$$

□

Esempi

$$\boxed{\varphi(x) = e^{x^2}}$$

composizione di:

$$f(y) = e^y, \qquad g(x) = x^2$$

quindi:

$$\varphi'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$\boxed{\varphi(x) = \ln \frac{x+1}{x+2}}$$

composizione di:

$$f(y) = \ln y, \qquad g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

quindi:

$$\varphi'(x) = \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Teorema (derivata della funzione inversa). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e siano $a, b \in I$, $a < b$ tali per cui f sia continua e strettamente monotona in $]a, b[$. Supponiamo poi che nel punto $x_0 \in]a, b[$ f sia derivabile e che riesca $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e vale la formula:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione. Prendiamo $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ in modo che $y_0 + k \in f(I)$ e poniamo $x_0 + h = g(y_0 + k) \in I$. Allora, essendo $g(y_0) = x_0$ e $f(x_0 + h) = y_0 + k$, troviamo:

$$\frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \frac{(x_0 + h) - x_0}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Ora per $k \to 0$ è anche $h \to 0$ e da qui si ha la tesi. □

Esempi

Se $f(x) = x^2$, $x > 0$ l'inversa $g(y)$ è la funzione radice quadrata: $g(y) = \sqrt{y}$. Se $y_0 > 0$ è tale che $y_0 = x_0^2$, allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}.$$

Se $f(x) = e^x$, $x > 0$ l'inversa $g(y)$ è la funzione logaritmo: $g(y) = \ln y$. Se $y_0 > 0$ è tale che $y_0 = e^{x_0}$, allora:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$$

7 Ottimizzazione

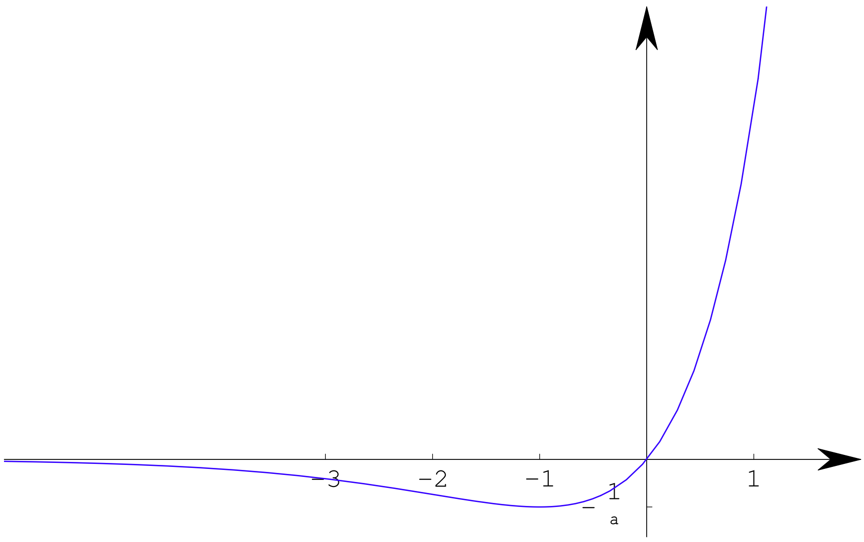
Esempio 1 Consideriamo la funzione $f(x) = x \cdot e^x$. Si ha:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x.$$

Pertanto:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

Ne viene che $x_m = -1$ è punto di minino. Il valore dell'estremo è $f(-1) = -e^{-1}$.



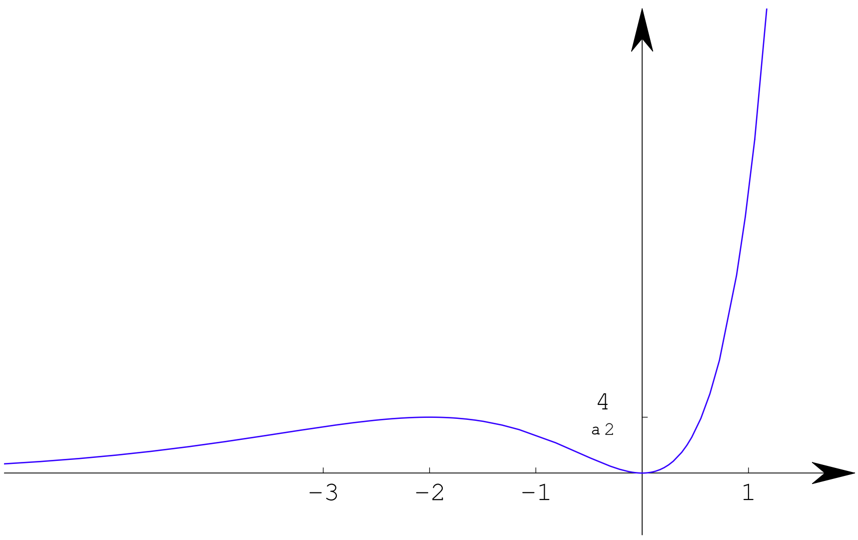
Esempio 2 Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Si ha:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 \cdot e^x = x(2+x) \cdot e^x.$$

Pertanto:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ e } x > 0$$

Ne viene che $x_m = 0$ è punto di minino. Il valore dell'estremo è $f(0) = 0$, mentre $x_M = -2$ è punto di massimo il valore dell'estremo è $f(-2) = 4e^{-2}$



Esempio 3 Cerchiamo i massimi e minimi relativi della funzione:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 6\left(x^2 - x - 2\right) = 6\,(x-2)\,(x+1)$$

Determiniamo l'insieme dei punti in cui $f'(x) \geq 0$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 2$$

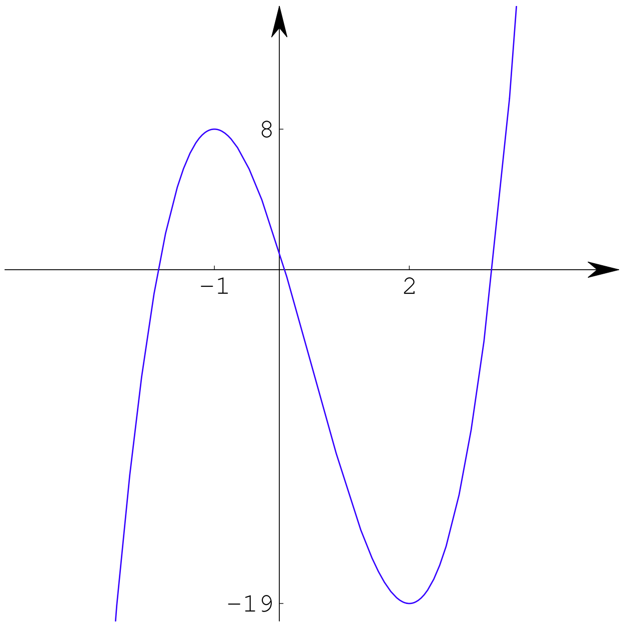
Ne segue che $x_M = -1$ è punto di massimo relativo e $x_m = 2$ è punto di minimo relativo. Gli estremi relativi sono:

$$\begin{aligned} (-1, f(-1)) &= (-1, 8) \\ (2, f(2)) &= (2, -19) \end{aligned}$$

Osservato poi che:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x^3 - 3x^2 - 12x + 1\right) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} \left(2x^3 - 3x^2 - 12x + 1\right) = -\infty$$

possiamo dare una rappresentazione qualitativa del grafico di f.



8 Convessità

Definizione 2. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- quasi convessa se per ogni $u, v \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right) \leq \max\left\{f(u), f(v)\right\},$$

- strettamente quasi convessa se per ogni $u, v \in I, u \neq v$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right) < \max\left\{f(u), f(v)\right\},$$

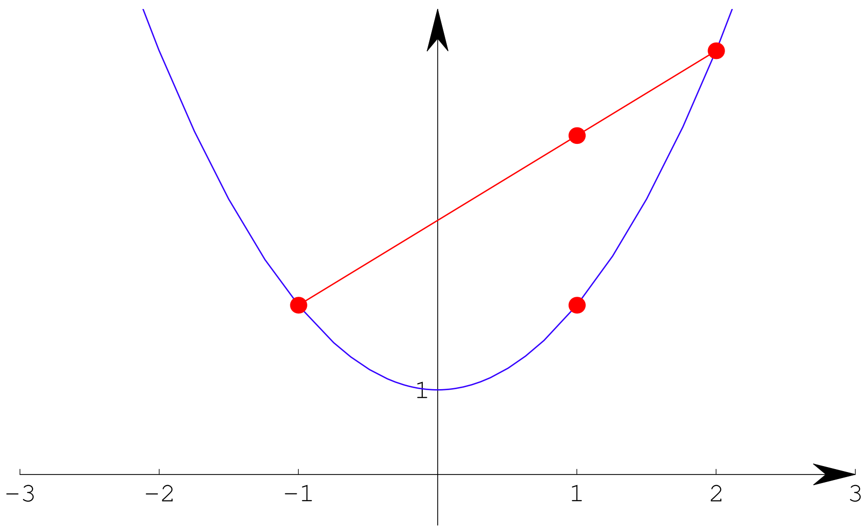
- convessa se per ogni $u, v \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right) \leq (1-\alpha)f(u) + \alpha f(v),$$

- strettamente convessa se per ogni $u, v \in I$ $u \neq v$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right) < (1-\alpha)f(u) + \alpha f(v).$$

Se f è [strettamente] convessa, allora f è [strettamente] quasi convessa. Il contrario è falso, basta considerare la funzione reale di una variabile reale $f(x) = -x^2$ definita per $x \in [0, +\infty[$.



8.1 Relazioni fra Convessità e Differenziabilità

In questo paragrafo faremo vedere che l'idea geometrica di funzione convessa, è quella di una funzione il cui grafico al di sopra della retta tangente

Iniziamo provando che il rapporto incrementale:

$$\rho(t) := \frac{f(u+t) - f(u)}{t}, t \neq 0,$$

é funzione crescente di t.

Lemma 1. *Sia sia $f : I \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Fissati $x, z \in I$ con $x < z$, per ogni $y \in (x, z)$ riesce:*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(x)}{z - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Dimostrazione. Esiste certamente $\alpha \in]0, 1[$, tale per cui $y = \alpha x + (1 - \alpha) z$. L'ipotesi di convessità su f fornisce $f(y) < \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(z)$, da cui:

$$f(y) - f(x) < (1 - \alpha) \left(f(z) - f(x) \right).$$

D'altra parte, $y - x = (1 - \alpha)(z - x)$, in modo che si ha:

$$1 - \alpha = \frac{y - x}{z - x}.$$

Questo mostra la disuguaglianza a sinistra in dell'enunciato. Analogamente, ancora per la convessità in senso stretto di f, abbiamo:

$$f(x) > \frac{1}{\alpha} \left(f(y) - (1 - \alpha) f(z) \right),$$

da cui:

$$f(z) - f(x) < \frac{1}{\alpha} \left(f(z) - f(y) \right).$$

Poichè $z - x = \alpha^{-1}(z - y)$ si ha:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{z - x}{z - y},$$

e questo prova la disuguaglianza destra della tesi, e con ciò il lemma. □

Teorema 8. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa. Siano $u, v \in I$, $v \neq 0$; allora, se $t \in \mathbb{R}$ $t \neq 0$ la funzione $\rho(t)$ è crescente.*

Dimostrazione. Siano t_1, t_2 due reali non nulli. Se $0 < t_1 < t_2$, allora posto $x = u$, $y = u + t_1$ e $z = u + t_2$

$$\frac{f(u+t_1) - f(u)}{t_1} < \frac{f(u+t_2) - f(u)}{t_2},$$

quindi $\rho(t_1) < \rho(t_2)$. I casi $t_1 < 0 < t_2$ e $t_1 < t_2 < 0$ sono analoghi. □

Il Teorema 8 assicura l'esistenza dei limiti destro e sinistro del rapporto incrementale, vale a dire esistono i limiti:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(u+t) - f(u)}{t}, \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{f(u+t) - f(u)}{t}.$$

Attualmente però limitandoci alle sole ipotesi formulate di convessità per f, tali limiti possono essere $\pm\infty$, o può accadere che:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(u+t) - f(u)}{t} < \lim_{t \to 0^+} \frac{f(u+t) - f(u)}{t}.$$

In particolare se una funzione è dotata di derivata prima, e questa è crescente, la funzione è convessa.

Ad esempio la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è convessa

Teorema 9. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è strettamente convessa;*
2. *$f(v) > f(u) + (v - u)\, f'(u)$ per ogni $u, v \in I$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia strettamente convessa. Allora la funzione:

$$\rho(t) := \frac{f(u+t) - f(u)}{t}, \ t \neq 0$$

è crescente, quindi:

$$\begin{aligned}(v-u)\, f'(u) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(u + t(v-u)) - f(u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \rho(t) < \rho(1) = f(v) - f(u)\,.\end{aligned}$$

Reciprocamente, se si fissa $\alpha \in]0, 1[$ e si sceglie $v = u$, $u = \alpha v + (1 - \alpha)u$, allora:

$$f(u) > f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right) + \alpha\,(u - v)\, f'((1-\alpha)u + \alpha v).$$

Analogamente, se $v = v$, $u = (1 - \alpha)u + \alpha v$:

$$f(v) > f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right) + (1-\alpha)\,(v-u)\, f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right).$$

Moltiplicando la penultima disuguaglianza per $(1 - \alpha)$ e l'ultima per α e sommando membro a membro troviamo:

$$(1-\alpha) f(u) + \alpha f(v) > f\left((1-\alpha)u + \alpha v\right).$$

□

Corollario 3. *Sia f strettamente convessa e derivabile. Se $u \in I$ un punto critico, allora:*

$$f(u) = \min_{v \in I} f(v).$$

Dimostrazione. Per ogni $v \in I$ si ha:

$$f(v) > f(u) + (v - u)\, f'(u) = f(u).$$

$\square$

Anche per la quasi convessità , nel caso differenziabile, si può ottenere una caratterizzazione specifica.

Teorema 10. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f é quasi convessa se e solo se per ogni $u, v \in I$ si ha che:*

$$f(u) \leq f(v) \to (u - v)\, f'(u) \leq 0.$$

8.2 Disuguaglianze e convessità

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione convessaallora dati n numeri $\alpha_i \in [0, 1]$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ e dati n punti $x_i \in I$ si ha:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(x_i) \tag{8.1}$$

Dalla disuguaglianza (8.1) si deduce una importante disuguaglianza.
Se $x_1, \ldots, x_n$ sono n numeri strettamente positivi allora diremo:

- media aritmetica di $x_1, \ldots, x_n$:

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- media geometrica di $x_1, \ldots, x_n$:

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

- media armonica di $x_1, \ldots, x_n$:

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right]^{-1}.$$

Valgono le seguenti disuguaglianze, valide comunque si prendano n numeri positivi $x_1, \ldots, x_n$:

$$H(x_1, \ldots, x_n) \leq G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n) \tag{8.2}$$

Poniamo $z_i = \ln x_i$ e applichiamo (8.1) con $f(x) = e^x$ che sappiamo essere convessa:

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{z_i}{n}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum \exp z_i = A(x_1, \ldots, x_n),$$

In questo modo abbiamo la disuguaglianza a destra in (8.2). A questo punto segue subito anche la disuguaglianza sinistra in (8.2):

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)} \leq \frac{1}{G\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)} = G(x_1, \ldots, x_n)$$

La convessità della funzione esponenziale consente anche di dimostrare un'altra importante disuguaglianza.
Se $p, q > 1$ sono due numeri reali tali che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

allora per ogni $x, y \geq 0$ si ha:

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

Possiamo supporre che sia $x, y > 0$, essendo ovvia la tesi altrimenti. Si ha:

$$xy = e^{\ln(x \cdot y)} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln x^p} + \frac{1}{q}e^{\ln y^q} = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

9 Forme indeterminate

Teorema (Johannes Bernoulli 1691-1692, de l'Hôpital 1696) Siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabili in $]a, b[$ e si supponga che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

e se esiste:

$$\ell = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{9.1}$$

allora:

$$\ell = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{9.2}$$

L'esistenza del limite (9.1) significa che fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in]b - \delta_\varepsilon, b[$:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Fissiamo due elementi $u, v \in]b - \delta_\varepsilon, b[$, allora per il Teorema di Cauchy deduciamo l'esistenza di un elemento ξ compreso nell'intervallo di estremi u e v per cui:

$$\left| \frac{f(u) - f(v)}{g(v) - g(u)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Se in (9.3) facciamo tendere $v \to b^-$, possiamo sfruttare (9.1) e così ottenere la disuguaglianza:

$$\left| \frac{f(u)}{g(v)} - \ell \right| < \varepsilon$$

valida per $u \in]b - \delta_\varepsilon, b[$, il che prova (9.2)

La dimostrazione del teorema è riproducibile, con opportuni adeguamenti, nelle seguenti situazioni:

- per $b = +\infty$
- per $\ell = +\infty$ oppure per $\ell = -\infty$
- per il caso $x \to a^+$

Vale anche un teorema relativo alle forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$:
Siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabili in $]a, b[$ e si supponga che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = \infty$$

e se esiste:

$$\ell = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora:

$$\ell = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Esempio
Cerchiamo di calcolare:

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot e^x - 1 - x}{\sin x \left(\cos 2x - 1\right)}.$$

Vediamo se esiste:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{x \to 0} \frac{D\left(\cos x \cdot e^x - 1 - x\right)}{D\left(\sin x \left(\cos 2x - 1\right)\right)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x - 1}{\cos x \left(\cos 2x - 1\right) - 2 \sin x \sin 2x} \end{aligned}$$

Anche quest'ultimo limite è in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, pertanto esaminiamo l'esistenza del limite:

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \lim_{x \to 0} \frac{D\left(\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x - 1\right)}{D\left(\cos x \left(\cos 2x - 1\right) - 2 \sin x \sin 2x\right)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin x \cdot e^x}{-\left(\cos 2\,x - 1\right)\, \sin x - 4\, \cos 2\,x\, \sin x - 4\, \cos x\, \sin 2\,x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2e^x}{\cos 2\,x - 1 + 4\, \cos 2\,x + 4\, \cos x\, \frac{\sin 2\,x}{\sin x}} \end{aligned}$$

Ora, osservato che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2\,x}{\sin x} = 2$$

ne viene che:

$$\ell_2 = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Ora, per il teorema di Johannes Bernoulli-de l'Hôpital, abbiamo che:

$$\frac{1}{6} = \ell_2 = \ell_1 = \lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot e^x - 1 - x}{\sin x \left(\cos 2x - 1\right)}$$

10 Derivate successive

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione, definita nell'intervallo aperto I e derivabile per ogni $x \in I$, diremo che la funzione è dotata di derivata seconda in $x_0 \in I$ se risulta derivabile in x_0 la funzione derivata f'. Dunque f è dotata di derivata seconda se esiste finito:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}. \tag{10.1}$$

In pratica è sufficiente derivare la derivata prima.
Ad esempio, se $f(x) = x^2$ si ha:

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2.$$

Se $f(x) = \sin x$:

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x.$$

Se si suppone la funzione derivabile $f : I \to \mathbb{R}$ sia tale che esista il limite (10.1), allora il valore della derivata seconda può essere ottenuto calcolando:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f(2x_0 - x) - 2f(x_0)}{(x - x_0)^2}$$

Naturalmente è possibile continuare nel processo di derivazione e considerare derivate terze, quarte etc.

$$f'(x_0), f''(x_0), f^{(3)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$$

Si può provare per induzione la formula per la derivata $n-$ esima del prodotto di due funzioni:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

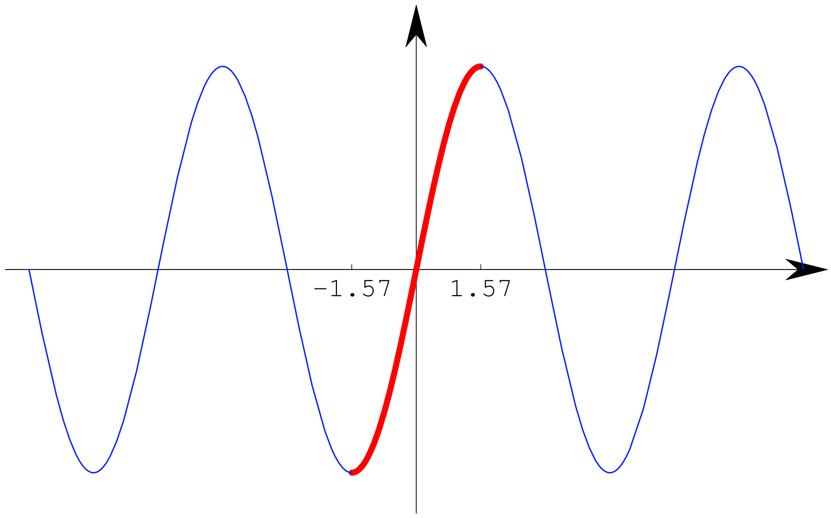
ove conveniamo che:

$$f^{(0)}(x) = f(x), f^{(1)}(x) = f'(x), \ldots$$

11 Inverse delle funzioni goniometriche

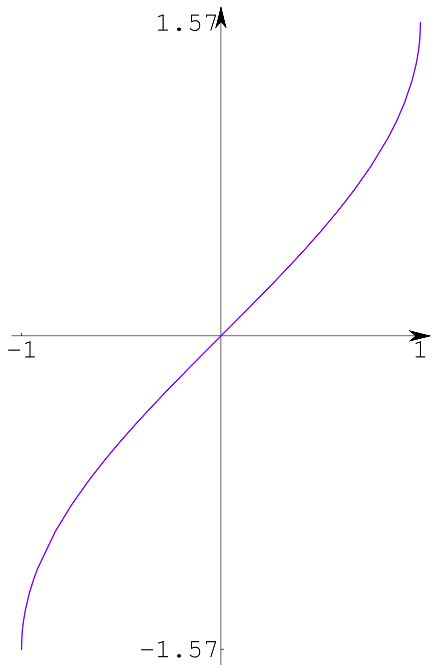
11.1 Seno circolare

$s_c(x) = \sin x$

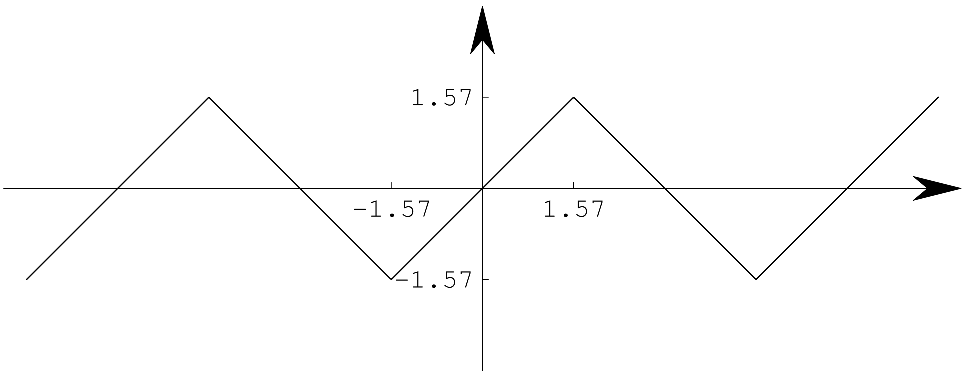


L'inversione del seno circolare avviene solo per valori della variabile $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: zona rossa.

$$\arcsin y = \left(s_c \Big/ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)^{-1} (y), y \in [-1, 1]$$



La nozione di inversione parziale è ben espressa dal grafico della funzione $f(x) = \arcsin \sin x$



La derivata della funzione $\arcsin y$ si ottiene dal teorema per la derivazione della funzione inversa. Sia infatti $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e sia $y = \sin x$. Allora:

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{D(\sin x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

11.2 Seno iperbolico

La funzione seno iperbolico:

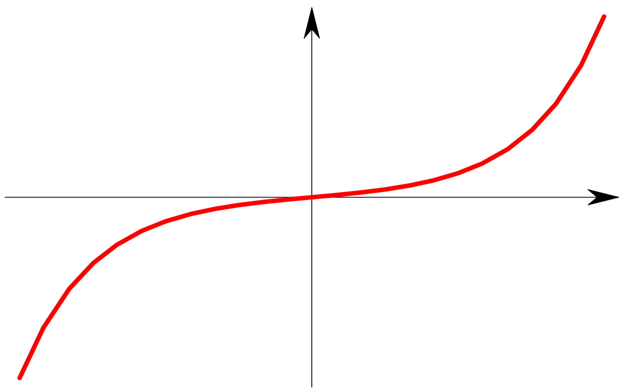
$$s_h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

è strettamente crescente e va da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pertanto la sua inversa è globalmente definita:

$$\sinh^{-1} y = (s_h)^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right), y \in \mathbb{R}..$$

La sua derivata è:

$$D\left(\sinh^{-1} y\right) = \frac{1}{D(\sinh x)} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$



11.3 Coseno circolare

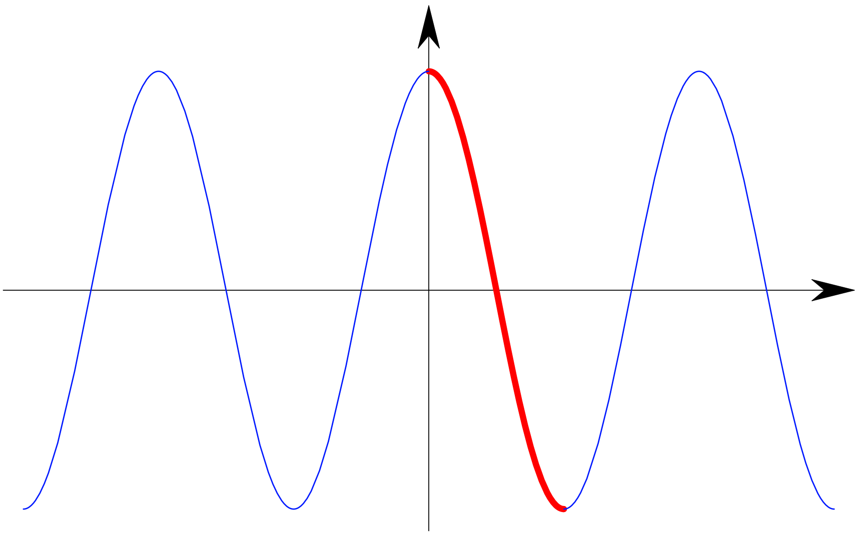
$$c_c(x) = \cos x.$$

L'inversione si esegue solo per $x \in [0, \pi]$.

$$\arccos y = (c_c\,/[0,\pi]\,)^{-1}(y), y \in [-1, 1].$$

La derivata è:

$$D(\arccos y) = \frac{1}{D(\cos x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$



11.4 Coseno iperbolico

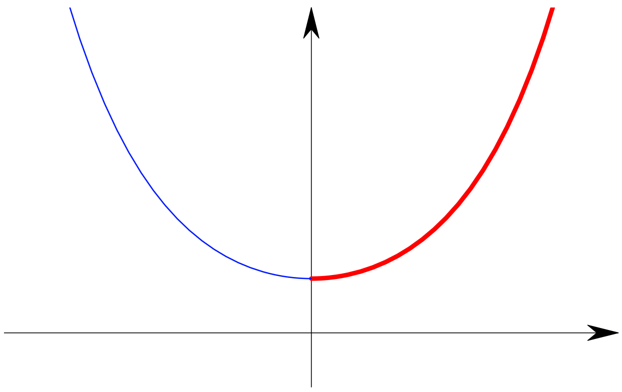
$$c_h(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

L'inversione si esegue solo per $x \in [0, \infty[$:

$$\cosh^{-1} y = (c_h\,/[0,\infty[)^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right), y \in [1, \infty[.$$

La derivata è:

$$D(\cosh^{-1} y) = \frac{1}{D(\cosh x)} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$



11.5 Tangente circolare

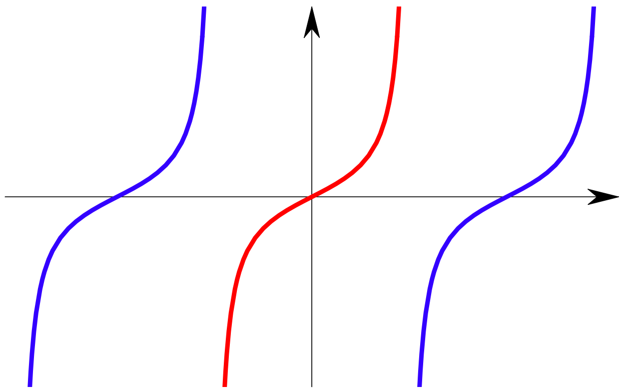
$$t_c(x) = \tan x$$

L'inversione si fa per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\arctan y = \left(t_c \Big/ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)^{-1}(y), y \in \left]-\infty, \infty\right[$$

La derivata è:

$$D(\arctan y) = \frac{1}{D(\tan x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$



11.6 Tangente iperbolica

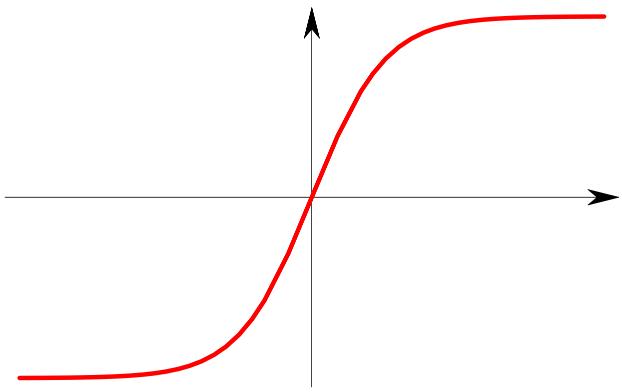
$$t_h(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}.$$

L'inversa è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$\tanh^{-1} y = (t_h)^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, y \in \left]-1, 1\right[.$$

La derivata è:

$$D\left(\tanh^{-1} y\right) = \frac{1}{D\left(\tanh x\right)} = \frac{1}{1-\tanh^2 x} = \frac{1}{1-y^2}.$$

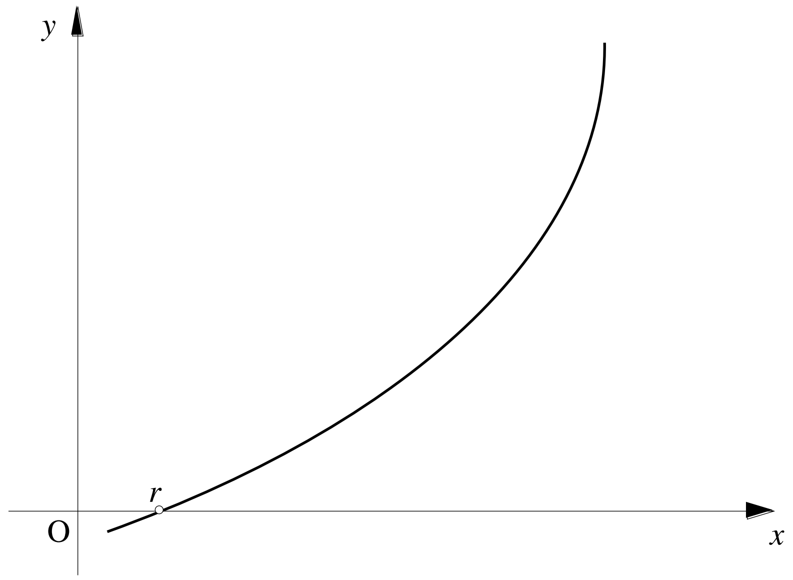


12 Il metodo di Newton delle tangenti

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ che assuma valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a, b]$. E' ben noto che, se si suppone la continuità di f, si sa che esiste almeno un elemento $r \in]a, b[$ per cui $f(r) = 0$. Il nostro obiettivo è risolvere l'equazione:

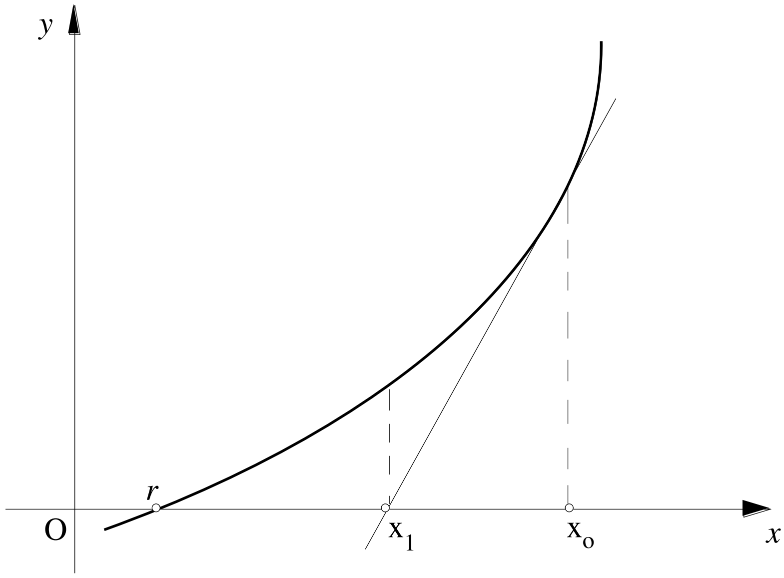
$$f(x) = 0, \tag{12.1}$$

vale a dire individuare questo elemento r. Se poi ammettiamo che f sia derivabile con derivata di segno costante in $]a, b[$ tale elemento r è unico. Nel prosieguo supporremo sempre che tale ipotesi sia soddisfatta. Per fissare le idee supporremo poi che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Tutto questo non danneggia la generalità del ragionamento che stiamo per presentare. La situazione ? bene illustrata dalla prima figura sotto.



Fissiamo un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) > 0$ e consideriamo la retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Tale retta ha, come sappiamo, equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Calcoliamo ora l'ascissa x_1 in cui la retta tangente taglia l'asse delle x. Ponendo $y = 0$ ed eseguendo il calcolo, vediamo che:

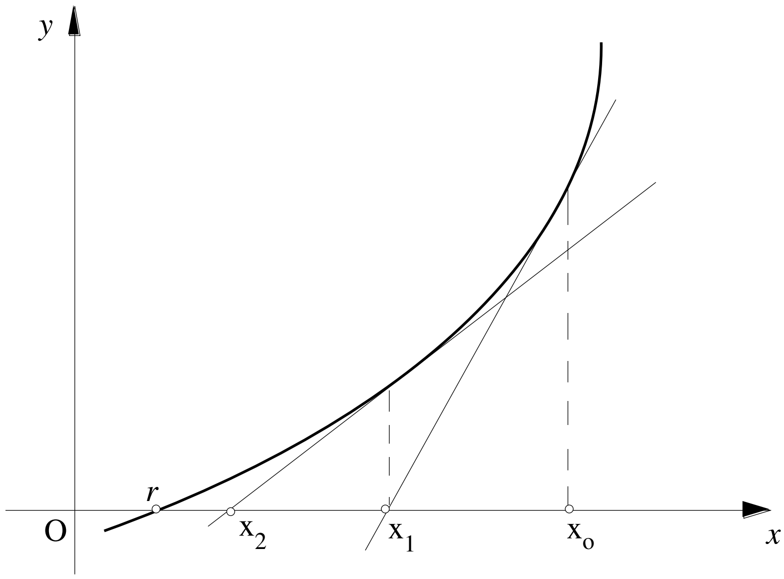
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



La figura sopra mostra graficamente il procedimento per determinare il punto x_1. Facciamo anche notare che è l'ipotesi $f'(x) > 0$ che permette di ricavare l'ascissa x_1 senza dividere per zero. A questo punto calcoliamo $f(x_1)$. Se $f(x_1) = 0$, allora $x_1 = r$ e la ricerca è terminata. Se, invece, $f(x_1) \neq 0$, ragionando esattamente come prima, scriviamo l'equazione della retta tangente a $y = f(x)$ nel punto $(x_1, f(x_1))$ ottenendo $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$, in modo che possiamo ricavare il punto x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Ora si calcola $f(x_2)$: se f si annulla il processo termina, se invece $f(x_2) \neq 0$ il processo riparte per determinare l'elemento x_3.



In pratica abbiamo identificato un processo iterativo nel modo seguente:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \text{ tale che } f(x_0) \neq 0, \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{12.2}$$

Facendo riferimento anche all'ultima figura, vediamo che questo metodo non può che finire coll'approssimare la soluzione dell'equazione (12.1). Per ragionare correttamente nelle applicazioni, è necessario comprendere se il procedimento iterativo illustrato finisca effettivamente sempre e comunque per produrre una radice dell'equazione. La risposta è affermativa, e ne daremo conto anche se con ipotesi ridondanti nel teorema 11.

12.1 Esempio

Consideriamo l'equazione di terzo grado:

$$f(x) = 7 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 = 0. \tag{E$_1$}$$

Per prima cosa osserviamo che, essendo:

$$f'(x) = 6 - 6\,x + 3\,x^2$$

abbiamo $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto il discriminante del polinomio di secondo grado è negativo. Possiamo applicare il metodo delle tangenti all'equazione (E$_1$) attivando il procedimento di iterazione (12.2). Si osservi che essendo (E$_1$) un'equazione di terzo grado, sappiamo a priori che essa ammette almeno una radice reale e che il comportamento della derivata prima ci assicura che tale radice è unica. La funzione iterativa $F(x)$ è:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{7 + 3\,x^2 - 2\,x^3}{-6 + 6\,x - 3\,x^2}.$$

In questo modo il processo di Newton si riduce alla valutazione delle iterazioni della funzione $F(x)$. Precisamente esso può essere descritto semplicemente da:

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

Valutando $F(x)$ in $x = 0$ troviamo $x_1 = F(0) = F(x_0) = -\frac{7}{6} \simeq -1,16667$. Proseguendo troviamo $x_2 = F(x_1) = -\frac{308}{369} \simeq -0,834688$. Il valore corrispondente del polinomio è $f\,(-0,834688) \sim -0,679775$. Infine otteniamo la tabella:

$$\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0) \simeq -1,166667\\
x_2 &= F(x_1) \simeq -0,834688\\
x_3 &= F(x_2) \simeq -0,782790\\
x_4 &= F(x_3) \simeq -0,781619\\
x_5 &= F(x_4) \simeq -0,781618\\
x_6 &= F(x_5) \simeq -0,781618
\end{aligned}$$

Molto interessante è anche la valutazione del polinomio $f(x)$ in corrispondenza di x_5; si ha $f(x_5) = 6,0245 \times 10^{-7}$. Anche questo rende l'idea della validità dell'approssimazione ottenuta.

Formalizziano una condizione sufficiente per la convergenza dell'algoritmo di Newton.

Teorema 11. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile con derivata prima continua. Se f è strettamente crescente e convessa e se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora la successione di Newton:*

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

converge decrescendo all'unico elemento $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione. Cominciamo facendo vedere che $x_n \geq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$ l'affermazione è vera in quanto $x_0 = b > \bar{x}$. Se, invece, $n \geq 1$, ricordando la convessità di f abbiamo:

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n). \tag{12.3}$$

D'altra parte, per definizione:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

quindi (12.3) si lascia scrivere come:

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)\left[-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right] = 0.$$

Perciò $f(x_{n+1}) \geq 0$, quindi $x_{n+1} \geq \bar{x}$. Ora è facile vedere che x_n decresce, infatti ricordando che nelle nostre ipotesi abbiamo $f(x_n) \geq 0$ e $f'(x_n) > 0$, si trova che:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0.$$

Infine la monotonia della successione x_n e la sua limitatezza ne assicurano la convergenza. □

13 I teoremi fondamentali del calcolo

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata, dalla definizione di integrale si desume la disuguaglianza:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a) \tag{13.1}$$

in cui:

$$m = \inf_{[a,b]} f, M = \sup_{[a,b]} f$$

Se f è continua da (13.1) si deduce un importante teorema, detto *teorema della media integrale.*

Teorema (Cauchy, 1821). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, esiste un elemento $\bar{x} \in [a, b]$ tale per cui:*

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{13.2}$$

Dimostrazione. Se f è continua si ha, per il teorema di Weierstraß che:

$$m = \min_{[a,b]} f, M = \max_{[a,b]} f,$$

quindi, se scriviamo (13.1) come:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M,$$

possiamo sfruttare il teorema di Bolzano, osservato che la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{13.3}$$

è compresa fra gli estremi della funzione, per ottere la tesi (13.2). □

La quantità (13.3) è detta *media integrale* della funzione f, questo fatto si spiega ricordando che, se l'intervallo $[a, b]$ viene ripartito in parti di lunghezza uguale di estremi $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, con:

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, 0 \leq k \leq n,$$

preso ad arbitrio un punto $u_k \in [x_{k-1}, x_k]$, si ha che:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k).$$

Ora, se scriviamo:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(u_k)}{n},$$

il che significa che la media integrale di f è il limite per $n \to \infty$ della media aritmetica dei valori $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$.

Ricordiamo anche che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, presi $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ si ha che:

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$$

Teorema (Primo Teorema fondamentale). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua è ben definita la funzione:*

$$F(x) = \int_a^x f(u)du.$$

La funzione F, detta funzione integrale di f è derivabile e si ha che:

$$F'(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Fissati $x, x_0 \in [a,b]$ per il teorema della media integrale abbiamo:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(u)du = f(\bar{x})(x - x_0),$$

in cui $\bar{x} = \bar{x}(x, x_0)$ è un punto compreso fra x_0 e x. Se $x \to x_0$ anche $\bar{x}(x, x_0) \to x_0$, quindi per continuità abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0} f(\bar{x}) = f(x_0),$$

ne segue che:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(\bar{x})(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(\bar{x}) = f(x_0),$$

mostrando che $F(x)$ è derivabile e $F'(x_0) = f(x_0)$. ☐

Teorema (Secondo Teorema fondamentale). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e derivabile in $[a,b]$, tale che la derivata prima $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua, allora:*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\Phi(x) = \int_a^x f'(u)du.$$

Per il primo teorema fondamentale $\Phi(x)$ è una funzione derivabile e si ha, per ogni $x \in [a,b]$:

$$\Phi'(x) = f'(x).$$

Per il teorema della derivata nulla abbiamo allora che esiste una costante K tale per cui, per ogni $x \in [a,b]$:

$$\Phi(x) = f(x) + K.$$

In particolare:

$$\Phi(a) = f(a) + K,$$

ma $\Phi(a) = \int_a^a f'(x)dx = 0$, quindi:

$$K = -f(a).$$

Se ora prendiamo $x = b$ abbiamo, in particolare:

$$\Phi(b) = f(b) - f(a),$$

ma:

$$\Phi(b) = \int_a^b f'(u)du,$$

il che prova la tesi. $\square$

Teorema (Teorema della media generalizzata). *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue con $g > 0$ in $[a, b]$. Allora esiste $\bar{x} \in [a, b]$ per cui:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\bar{x}) \int_a^b g(x)dx.$$

Dimostrazione. Definiamo le funzioni:

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \int_a^x f(u)g(u)du, \\ \Gamma(x) &= \int_a^x g(u)du. \end{aligned}$$

Applichiamo il teorema di Cauchy che assicura l'esistenza di un elemento $\bar{x} \in [a, b]$ tale che:

$$[\Lambda(b) - \Lambda(a)]\, \Gamma'(\bar{x}) = [\Gamma(b) - \Gamma(a)]\, \Lambda'(\bar{x}),$$

cioé:

$$g(\bar{x}) \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\bar{x})g(\bar{x}) \int_a^b g(x)dx,$$

da cui, vista l'ipotesi su g si ha la tesi. $\square$

14 Metodi di integrazione

14.1 Integrazione per parti

Teorema 12. *Siano Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue e derivabili, con derivata prima integrabile, allora:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)g(x))'\, dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx, \end{aligned}$$

pertanto:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

e da qui si ha la tesi. $\square$

14.1.1 Esempio

Calcoliamo:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x dx.$$

Poniamo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, pertanto $f'(x) = 1$ e $g(x) = e^x$ e:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x dx = 2\ln 2 - \int_0^{\ln 2} e^x = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

14.1.2 Esempio

Calcoliamo:

$$\int_0^1 \ln\frac{x+2}{x+1}dx.$$

Poniamo $f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1}$ e $g'(x) = 1$, pertanto $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ e $g(x) = x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln\frac{x+2}{x+1}dx &= \ln\frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx \\
&= \ln\frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{2}{x+2}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \\
&= \ln\frac{3}{2} + 2\left[\ln(x+2)\right]_0^1 - \left[\ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= \ln\frac{3}{2} + 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 \\
&= \ln\frac{27}{16}
\end{aligned}$$

14.2 Integrazione per sostituzione

Teorema 13. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e sia $\varphi : J \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che per ogni $t \in J$ sia $\varphi(t) \in [a,b]$, inoltre esistano $\alpha, \beta \in J$ tali che $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Si ha, allora:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Consideriamo la primitiva:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du.$$

Osserviamo che ha senso eseguire, al variare di $t \in J$ la composizione:

$$F(\varphi(t)).$$

Applicando la relativa regola per la derivazione della funzione composta vediamo che:

$$\frac{d}{dt}F\left(\varphi(t)\right) = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$$

e, integrando fra α e β, per il secondo teorema fondamentale vediamo che:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

come volevasi.

15 Formula di Taylor MacLaurin

Definizione 3. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, diremo polinomio di Taylor di ordine n generato da f in a il polinomio di grado n, nell'indeterminata $b \in I$:

$$\begin{aligned} p_n(b,a) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Si conviene di porre $f^{(0)} = f$.

Il teorema di Taylor con resto secondo Lagrange stabilisce quanto segue:

Teorema 14. *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^{n+1}$, per un certo $n \in \mathbb{N}$, allora se $a, b \in I$, $a < b$, si ha che esiste $\xi \in [a,b]$ tale che:*

$$f(b) = p_n(b,a) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema si basa su due passi: in primo luogo si prova la seguente affermazione, che segue dal teorema di integrazione per parti e dal principio di induzione matematica:

$$f(b) = p_n(b,a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx \tag{15.1}$$

Proviamo (15.1) per induzione su n. Per $n = 1$ si deve provare che:

$$\begin{aligned} f(b) &= p_1(b,a) + \frac{1}{1!}\int_a^b (b-x)^1 f^{(1+1)}(x)dx \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-x)f^{(2)}(x)dx. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Per il secondo teorema fondamentale del calcolo, possiamo scrivere:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx. \tag{15.3}$$

Intergrando per parti (15.3), otteniamo:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \left[(x-b)f'(x)\right]_a^b - \int_a^b (x-b)f^{(2)}(x)dx \\ &= (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-x)f^{(2)}(x)dx, \end{aligned}$$

in questo modo (15.2) è provata.

Supponiamo che (15.1) sia verificata per un certo $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ e mostriamo che essa vale anche per $k+1$. Per ipotesi sappiamo che:

$$f(b) = p_k(b,a) + \frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)dx. \tag{15.4}$$

Ora, integrando per parti troviamo che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\int_a^b (b-x)^k f^{(k+1)}(x)dx &= \frac{1}{k!}\left\{\left[-\frac{(b-x)^{k+1}}{k+1}f^{(k+1)}(x)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-x)^{k+1}}{k+1}\cdot f^{(k+2)}(x)dx\right\} \\
&= \frac{1}{k!}\left\{\frac{(b-a)^{k+1}}{k+1}f^{(k+1)}(b) + \int_a^b \frac{(b-x)^{k+1}}{k+1}\cdot f^{(k+2)}(x)dx\right\} \\
&= \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-x)^{k+1} f^{(k+2)}(x)dx.
\end{aligned}$$

Sostituendo in (15.4) troviamo che:

$$\begin{aligned}
f(b) &= p_k(b,a) + f^{(k+1)}(b)\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-x)^{k+1} f^{(k+2)}(x)dx \\
&= p_{k+1}(b,a) + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-x)^{k+1} f^{(k+2)}(x)dx,
\end{aligned}$$

che è la $k+1$ esima affermazione.

A questo punto possiamo provare il teorema di Taylor Lagrange.

Consideriamo la funzione continua:

$$\varphi(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x).$$

Il teorema sarà completamente provato facendo vedere che esiste $\xi \in [a,b]$ tale che:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx. \tag{15.5}$$

La continuità di $f^{(n+1)}$ assicura l'esistenza di due costanti e' ed e'' tali che, per ogni $x \in]a,b[$:

$$e' \leq f^{(n+1)}(x) \leq e''.$$

Ma, allora:

$$\frac{e'}{n!}\int_a^b (b-x)^n dx \leq \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx \leq \frac{e''}{n!}\int_a^b (b-x)^n dx,$$

da cui:

$$\frac{e'}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \leq \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx \leq \frac{e''}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ma, allora:

$$\inf_{x\in[a,b]}\varphi(x) \leq \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx \leq \sup_{x\in[a,b]}\varphi(x),$$

pertanto esiste $\xi \in [a,b]$ per cui vale (15.5). $\square$

16 Elasticità di una funzione

Supponiamo che il fatturato di una azienda sia aumentato da un anno all'altro di €$1'000'000 = \Delta_1$. Se applicassimo il concetto di rapporto incrementale [1] troveremmo la variazione che media del fatturato è:

$$\frac{\Delta_1}{1} = 1'000'000.$$

Se ora consideriamo due distinte aziende che nell'arco di un anno hanno un aumento di fatturato pari a Δ_1 ma la prima fatturava €$100'000'000$ all'inizio dell'anno mentre la seconda fatturava €$2'000'000$, è evidente che le due variazioni hanno diversa importanza. E' il concetto di elasticità che tiene conto di questo aspetto.

Definizione 4. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione, se $x_0, x \in I$ per cui $f(x_0) \neq 0$, diremo coefficiente di elasticità d'arco di f :

$$\varepsilon_f(x_0, x) = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\dfrac{x - x_0}{x_0}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \frac{x_0}{x - x_0}.$$

Se f è derivabile si definisce il coefficiente di elasticità puntuale in x_0 come:

$$\varepsilon_f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varepsilon_f(x_0, x) = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

- f si dice rigida (o non elastica) in x_0 se $|\varepsilon_f(x_0)| < 1$
- f si dice elastica in x_0 se $|\varepsilon_f(x_0)| > 1$
- f si dice anelastica in x_0 se $|\varepsilon_f(x_0)| = 1$

17 Cenno alle equazioni differenziali

Consideriamo il problema di determinare tutte le funzioni che hanno elasticità costante per ogni x : si pone il problema di determinare tutte le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ per cui, fissato $c \in R$ per ogni $x \in I$ si ha:

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} = c. \tag{17.1}$$

scriviamo (17.1) come:

$$f'(x) = \frac{c}{x} f(x). \tag{17.2}$$

La relazione (17.2) è un'equazione in cui ad essere incognita è la funzione f. Essa è detta equazione differenziale in quanto la relazione funzionale lega f alla sua derivata prima. Per questo è detta equazione differenziale del primo ordine.

In generale una equazione differenziale del primo ordine è un'equazione del tipo:

$$f'(x) = F\left(x, f(x)\right). \tag{17.3}$$

Non esiste un procedimento generale per la risoluzione esplicita di (17.3), ma possiamo dire che il problema (17.3) ammette unica soluzione se si ipotizza che la funzione F, che regola l'evoluzione dinamica del sistema, soddisfi la disuguaglianza:

$$|F(x, \varphi_1) - F(x, \varphi_2)| \leq L\, |\varphi_1 - \varphi_2|$$

in un opportuno intorno rettangolare $\mathcal{R}$ contenente i punti $(x, \varphi_1), (x, \varphi_2)$, e che si fissi il valore della soluzione f in un punto $x_0 \in I$.

In alcune situazioni particolari il problema (17.3) può essere risolto esplicitamente.

[1] Notiamo che non ci interessa conoscere il valore del fatturato all'inizio e alla fine del periodo di osservazione

17.1 Equazioni a variabili separabili

Una equazione a variabili separabili è una equazione del primo ordine del tipo:

$$\begin{cases} f'(x) = a(x)b\left(f(x)\right) \\ f(x_0) = f_0 \end{cases} \tag{17.4}$$

Ad esempio (17.2) è a variabili separabili con $a(x) = \frac{c}{x}$ e $b(f) = f$. Le equazioni a variabili separabili si risolvono mediante la seguente integrazione:

$$\int_{f_0}^{f(x)} \frac{1}{b(s)} ds = \int_{x_0}^{x} a(s) ds,$$

che definisce implicitamente la soluzione di (17.4). Nel caso di (17.2) si ha:

$$\int_{f_0}^{f(x)} \frac{1}{s} ds = \int_{x_0}^{x} \frac{c}{s} ds,$$

svolgendo i calcoli:

$$\ln\left|\frac{f(x)}{f_0}\right| = c \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|,$$

quindi:

$$|f(x)| = |f_0| \left|\frac{x}{x_0}\right|^c.$$

Per proseguire occorre conoscere il segno di f_0 e di x_0, se li supponiamo positivi, si trova:

$$f(x) = \frac{f_0}{x_0} x^c, \; x > 0.$$

17.2 Equazioni lineari

Si tratta di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} f'(x) = a(x)f(x) + b(x) \\ f(x_0) = f_0 \end{cases} \tag{17.5}$$

La soluzione si ottiene attraverso la formula:

$$f(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right] \left\{ f_0 + \int_{x_0}^{x} b(s) \exp\left[-\int_{x_0}^{s} a(r)dr\right] ds \right\}.$$

Ad esempio l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} f'(x) = 2xf(x) + x \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

si risolve, osservando che $a(x) = 2x$ e $b(x) = x$ calcolando:

$$\int_0^x a(s)ds = \int_0^x 2sds = x^2$$

$$\int_0^x b(s) \exp\left[-\int_{x_0}^{s} a(r)dr\right] ds = \int_0^x xe^{-x^2} = \left[-\frac{e^{-s^2}}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2}.$$

La soluzione è quindi:

$$f(x) = e^{x^2}\left(2 + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}.$$