Esercizi per il corso Matematica clea matricole dispari

Daniele Ritelli

anno accademico 2005/2006

Precorso

1. Eseguire le seguenti divisioni tra polinomi:

   (a) $\dfrac{x^2 - x - 20}{x - 5}$

   (b) $\dfrac{2x^3 + 2x - 1}{x - 1}$

   (c) $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

   (d) $\dfrac{-3x^3 + 48x}{x - 4}$

   (e) $\dfrac{6x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 12}{2x + 3}$

   (f) $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2 + x}$

   (g) $\dfrac{-2x^4 + x^3 + 6x^2 + x - 9}{x^2 + x - 2}$

2. Scomporre in fattori i seguenti polinomi di terzo grado $p(x)$ sapendo che per uno specificato valore di x_0 si ha $p(x_0) = 0$.

   (a) $x_0 = 1$, $p(x) = 6 - 5\,x - 2\,x^2 + x^3$

   (b) $x_0 = 1$, $p(x) = -2 + 2\,x - x^2 + x^3$

   (c) $x_0 = -2$, $p(x) = -6 - 3\,x + 2\,x^2 + x^3$

   (d) $x_0 = 2$, $p(x) = 10 - 5\,x - 2\,x^2 + x^3$

3. Risolvere le seguenti equazioni

   (a) $4x^2 + 12x + 3 = 0$

   (b) $8x^2 - 2x + 5 = 0$

   (c) $8x^2 - 4x + 2 = 0$

   (d) $x^2 - 16x = 0$

   (e) $-24x^2 - 3x = 0$

   (f) $x^2 + 4 = 0$

   (g) $x^2 - 1 = 0$

   (h) $(x + 3)\left(x^2 - x - 2\right) = 0$

   (i) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$

   (j) $2x + 1 = \dfrac{5}{x + 2} + 2$

   (k) $\dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{x}{x + 1}$

   (l) $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x} = -3$

   (m) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 2} = 3$

   (n) $\sqrt{x} = 9$

   (o) $\sqrt{1 - x} = \sqrt{2x - 2}$

   (p) $\sqrt{1 - x} = -\sqrt{2x - 2}$

   (q) $|x + 1| = 5$

   (r) $\left|x^2 + 3x + 1\right| = 5$

   (s) $|2x + 3| = |-x + 1|$

   (t) $e^x = 2$

   (u) $e^{3x-1} - 2 = 0$

   (v) $\ln x = 3$

   (w) $3\ln x - 2 = 0$

   (x) $\ln(x + 1) - \ln 2x = 0$

   (y) $\ln(x + 1) - \ln x = 1$

4. Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $2x-3<0$
(b) $x^2-5x+6\leq 0$
(c) $x^2-2x+1\geq 0$
(d) $3x^2-2x+1\geq 0$
(e) $2x+1\geq \dfrac{5}{x+2}$
(f) $\dfrac{x}{2x-1}\leq \dfrac{3}{1-x}$
(g) $(3x-16)(-2x+6)<0$
(h) $(x-6)(2x+8)(-x-1)\geq 0$
(i) $\left(x^2-2\right)\left(2x^2-5x+3\right)\leq 0$
(j) $\left(x^2-x\right)\left(2x^2-5x+3\right)\leq 0$
(k) $|x-1|<3$
(l) $\sqrt{x}<9$
(m) $\sqrt{x-1}>\sqrt{1-x}$
(n) $\sqrt[3]{1-x}>2$
(o) $e^x\leq 2$
(p) $3e^{2x}-2>0$
(q) $5\ln x<3$
(r) $\ln(x+1)\geq \ln 2x$
(s) $\ln(\ln x)>1$

5. In un sistema di coordinate cartesiane, rappresentare i punti $A(2,3)$, $B(-5,4)$, $C(-1,-2)$, $D(-2,0)$.
6. Trovare l'equazione della retta che unisce le coppie di punti:

   (a) $(4,2)$ e $(2,-3)$;
   (b) $(5,1)$ e $(-2,2)$;
   (c) $(-1,2)$ e $(3,2)$;
   (d) $(-2,0)$ e $(-2,7)$;
   (e) $\left(\dfrac{1}{2},-3\right)$ e $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$;
   (f) $(-2,-3)$ e il punto medio del segmento di retta da $(-25,-8)$ a $(15,2)$.

7. Dati coefficiente angolare m e un punto di passaggio (a,b), trovare l'equazione della linea retta così individuata:

   (a) $m=3$, $(2,1)$;
   (b) $m=-2$, $(-1,1)$;
   (c) $m=\dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$;
   (d) $m=0$, $(0,-2)$.

8. Quale dei seguenti punti : $(4,2)$; $(-1,-4)$; $\left(\dfrac{1}{2},-5\right)$; $(-3,0)$ appartiene alla retta $r)$ di equazione $2x-y-6=0$?
   Scrivere poi l'equazione di una delle infinite rette parallele $r)$ e di una delle perpendicolari ad $r)$.
9. Trovare l'equazione della retta che:

   (a) è parallela all'asse y e passa per il punto $(-3,1)$;
   (b) è parallela all'asse x e passa per il punto $(5,-4)$;
   (c) è parallela alla retta di equazione $2x-3y+4=0$ e passa per il punto $(1,1)$;
   (d) è perpendicolare all'asse y e passa per il punto $(4,-1)$;
   (e) è perpendicolare alla retta di equazione $x-5y+8=0$ e passa per il punto $(0,5)$.

10. Risolvere algebricamente e graficamente i seguenti *sistemi di equazioni* lineari in due incognite:

   (a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 4x-3y=4 \\ 8x-6y=5 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 4x-3y=4 \\ 12x-9y=12 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+3y=3 \\ -4x+5y=-12 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 10 \\ -4x + 5y = -12 \end{cases}$

11. Trovare le equazioni delle seguenti circonferenze:

    (a) Centro $(-3, 1)$ e raggio 2

    (b) Centro $(0, -1)$ e passante per il punto $(1, 1)$

12. Trovare centro e raggio delle seguenti circonferenze:

    (a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$
    (b) $x^2 + y^2 + x + y = 0$
    (c) $x^2 + y^2 - x - 6y - 12 = 0$
    (d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

13. Le equazioni:

    (a) $x^2 + y^2 + 2xy + y = 0$
    (b) $x^2 + y^3 - x - 6y - 12 = 0$
    (c) $x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

    rappresentano circonferenze?Motivare le risposte.

14. In quanti e quali punti la retta di equazione $y = 2x + 3$ interseca la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 2$?

15. Risolvere graficamente i seguenti sistemi di disequazioni:

    (a) $x + y < 0, 2x - y < 2$
    (b) $2x + y > 3, y - 3x < 1$
    (c) $2x + y \geq 3, y - 3x \geq 1$
    (d) $2x + y > 3, y - 3x \leq 1$
    (e) $2x + 3y \leq 0, 3x - 2y > 4$
    (f) $2x - y < 4, 2x + y \leq 6, x \leq 0$
    (g) $x+y < 3, 2x-y < 2, y-3x < 1, x > 0, y > 0$
    (h) $xy \geq 0, x \leq 1, y \geq -2$
    (i) $(x - 1)(y - 1) > 0, xy \leq 0$
    (j) $xy \geq 0, \left(x^2 + y^2 - 1\right) \leq 0$
    (k) $x^2 + y^2 - 2x - 2y < 0, y < x$
    (l) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$
    (m) $1 < y \leq x, x^2 + y^2 \geq 4$

16. Se $f(x) = \sqrt{x - 4} - 3x$, calcolare $f(4), f(8), f(-2)$ ed $f(13)$.

17. Classificare le seguenti funzioni e trovarne il dominio naturale:

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
    (b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2x}$
    (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 5}}{x^2 + 2x + 1}$
    (d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 3}{x + 4}}$
    (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}}$
    (f) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$
    (g) $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x - 3\right)$
    (h) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \ln(9 - 3x)$

18. Rapprsentare le seguenti funzioni in un sistema di riferimento cartesiano:

    (a) $f(x) = 2x + 3$
    (b) $f(x) = -5x$
    (c) $f(x) =\mid -3x + 5 \mid$
    (d) $f(x) =\mid 2x - 4 \mid$
    (e) $f(x) = x^2$
    (f) $f(x) = -5x^2$
    (g) $f(x) = x^2 + 2$

(h) $f(x) = 4x^2 + 2x$

(i) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

(j) $f(x) = 5x^2 + 7x - 2$

(k) $f(x) = -e^x$

(l) $f(x) = e^{-x}$

(m) $f(x) = 2 - e^x$

(n) $f(x) = -e^{2x}$

(o) $f(x) = -\ln x$

(p) $f(x) = \ln|x|$

(q) $f(x) = \ln(x-3)$

(r) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{se}\, x \geq 0 \\ -x, \text{se}\, x < 0 \end{cases}$

(s) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{se}\, x \leq 1 \\ x^2, \quad \text{se}\, x > 1 \end{cases}$

(t) $f(x) = \begin{cases} e^x, \quad \text{se}\, x > 0 \\ 2-x, \text{se}\, x \leq 0 \end{cases}$

Funzioni iperboliche

È $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

1. Sapendo che $\tanh x = \dfrac{5}{13}$ determinare, senza calcolare il valore di x, $\sinh x$ e $\cosh x$
2. Risolvere l'equazione $2\sinh x + 4\cosh x = -3$
3. Dimostrare che per ogni x, $t \in \mathbb{R}$ vale: $\sinh(x+t) = \sinh x \cosh t + \cosh x \sinh t$
4. Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono:

$$\cosh \operatorname{arcsinh} x = \sqrt{1+x^2},$$

$$\operatorname{arcsinh} \cosh x = \ln\left(\frac{e^{-x}+e^x}{2} + \sqrt{1 + \frac{(e^{-x}+e^x)^2}{4}}\right),$$

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh} x\right) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}},$$

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh} x\right) = \frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}}{2} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}},$$

essendo arcsinh la funzione inversa di sinh. Si suggerisce di determinare esplicitamente l'espressione di arcsinh risolvendo, rispetto a u l'equazione $\sinh u = x$.

Numeri reali

1. Dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $11^n + 4$ è divisibile per 5.
2. Provare, per induzione $n \in \mathbb{N}$ che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-2)^2 = \frac{n}{2}\left(6n^2 - 3n - 1\right)$
3. Provare, per induzione $n \in \mathbb{N}$ che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4k-1)^2 = \frac{n\left(16n^2 + 12n - 1\right)}{3}$
4. Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, \ n > 1 \end{cases}$$

   Mostrare per induzione su $n \in \mathbb{R}$ che $x_n = \dfrac{1}{n}$

5. Provare, per induzione su $n \in \mathbb{N}$ le seguenti affermazioni:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{6+4n+n^2}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3^k} = \frac{3}{2} \frac{3+3n+n^2}{2\,3^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)!}{2^k} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$

6. Posto $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ provare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{6}{2+k} + \frac{6}{3+k} \right) = \frac{6}{n+3} - 3 + H_{n+1}$

7. Sia $m \in \mathbb{N}$. Provare, per induzione su, $n \in \mathbb{N}$ che il numero $m^{2+n} + (1+m)^{1+2n}$ è divisibile per $1 + m\,(1+m)$

8. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $(n+1)! \geq 2^n$

9. Motivare quali fra i seguenti numeri reali sono irrazionali

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(b) $\sqrt[4]{81}$

(c) $\log_7 343$

(d) $\sqrt{3} + 1$

(e) $\sqrt[3]{3}$

(f) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$

Numeri complessi

1. Determinare le radici z_1 e z_2 dell'equazione complessa $z^2 - (1 - 20\,i) + 2 - 5\,i = 0$

2. Determinare le radici z_1 e z_2 dell'equazione complessa $(11 - 10\,i) - (6 - 2\,i)\,z + z^2 = 0$

3. Determinare le radici z_1, z_2, z_3 dell'equazione in $\mathbb{C}$: $6 - 15\,i - (1 - 20\,i)\,z - (6 + 5\,i)\,z^2 + z^3 = 0$ sapendo che $z_1 = 1$.

4. Determinare le radici z_1, z_2, z_3 dell'equazione in $\mathbb{C}$: $-35 - 14\,i + (37 + 16\,i)\,z - (3 + 2\,i)\,z^2 + z^3 = 0$ sapendo che $z_1 = 1$.

5. Scomporre in fattori di primo e secondo grado nel campo reale il polinomio $x^4 + 1$

6. Scomporre in fattori di primo e secondo grado nel campo reale il polinomio $x^8 - 1$

7. Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ per cui $\begin{cases} |z+2| > |z+2i| \\ \mathrm{Im}\ z > \mathrm{Re}\ z - 1 \end{cases}$

8. Risolvere l'equazione $\left(\dfrac{z - 2i}{z - i} \right)^3 = i$, $z \neq i$

9. Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ vale l'uguaglianza $(1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\right)^n$

Calcolo combinatorio

1. Giocando al lotto, quale è la probabilità che esca una cinquina costituita solo da numeri divisibili per 3?

2. Giocando al lotto, quale è la probabilità che esca una cinquina costituita solo da numeri divisibili per 5?

3. Quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato della parola **zanna**?

4. Quale è la probabilità che una estrazione del lotto (nb 5 numeri estratti) sulla ruota di Venezia non contenga il numero 53?

5. Quale è la probabilità che una estrazione del lotto (nb 5 numeri estratti) sulla ruota di Firenze non contenga il numero 53 e il numero 54?

6. Giocando al lotto quale è la probabilità che esca una cinquina costituita solo da numeri divisibili per 7?

7. Nel gioco del tresette (quaranta carte, quattro giocatori con dieci carte ciascuno) in quanti modi possono essere servite le carte?

8. Considerata la attuale enumeraione delle targhe automobilistiche italiane, esempio AB 123 CD quale è la probabilità di incontrare un'auto con targa palindroma?

Algebra lineare

1. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{(a)} \begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+x_4=5 \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=-3 \\ x_1-2x_2+4x_3+2x_4=8 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+x_4=-8 \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=-2 \\ x_1-2x_2+4x_3+2x_4=12 \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} 3\,x_1-5\,x_2+2\,x_3+x_4=1 \\ 2\,x_1-3\,x_2+x_3-x_4=-5 \\ x_1-x_2+3\,x_3+2\,x_4=7 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+x_4=4 \\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2+4x_3+2x_4=4 \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} 3\,x_1-5\,x_2+2\,x_3+x_4=13 \\ 2\,x_1-3\,x_2+x_3-x_4=13 \\ x_1-x_2+3\,x_3+2\,x_4=1 \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} 3\,x_1-5\,x_2+2\,x_3+x_4=15 \\ 2\,x_1-3\,x_2+x_3-x_4=14 \\ x_1-x_2+3\,x_3+2\,x_4=1 \end{cases}$$

2. Date le matrici:

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -3 & a & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -14 & 5 & 11 \\ -22 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

determinare, se possibile, $a \in \mathbb{R}$ in modo che sia $\mathcal{M}^2=\mathcal{N}$

3. Studiare, in dipendenza dal parametro reale x il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & 1 & 3 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & -2x & 4x \end{pmatrix}$$

4. Risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} -4x_1+\ \ x_2-7x_3=0 \\ -4x_1+2x_2+\ \ x_3=1 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=1 \\ -\,x_1+\ \ x_2-2\,x_3=0 \end{cases}$$

5. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 4 & a & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ vale 12?

6. Date le matrici:

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},\ \mathcal{N}=\begin{pmatrix} 3a & -6a & -6a \\ a & a & -2a \\ -2a & -2a & -5a \end{pmatrix}$$

dopo aver provato che $\mathcal{M}$ è invertibile, se determini, se possibile, $a \in \mathbb{R}$ in modo che $\mathcal{N}$ sia l'inversa di $\mathcal{M}$.

7. È data la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

individuare un vettore colonna non nullo $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^4$ per cui il sistema $\mathcal{A} \times X = \mathcal{B}$ abbia soluzione.

8. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo

$$\begin{cases} (a+1)x_1 + ax_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 - 2x_3 = 0 \\ ax_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni diverse da quella banale

9. Indicare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - ax_3 = -\dfrac{2}{45} \\ 5x_1 \qquad\qquad + 3x_3 = -\dfrac{1}{3} \\ 10x_1 + 3ax_2 + 6x_3 = a \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, una soluzione, nessuna soluzione.

Serie

1. Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ è divergente

2. Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin n}{1+n^3}$ è convergente

3. Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a}$ converge per $a > \dfrac{1}{2}$

4. Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$ diverge positivamente

5. Dimostare che la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{2x} - e^x - 2\right)^{n-1}$ converge per $\ln \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \ln \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

6. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x + \cos x)^n = a$ ammette soluzione nell'intevallo $[0, 2\pi]$

7. Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{\cos^2 n + \cos n + 7}{3^{n+2}}$ è convergente

8. Esiste un valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+an+n^2} - n\right) = 4$? [Risposta $a = 8$]

9. Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{3n} = e^6$

10. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{3}}{n!}$ converge

11. Dimostrare che la successione $x_n = \frac{1}{(-1)^n + 2^n}$ è decrescente

12. Dimostrare che la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{x^2-3}+x-3\right)^{n-1}$ converge per $\frac{7}{4} < x < \frac{19}{8}$

13. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{5}{12}$

14. Dimostrare che la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-2^{-2x}\right)^n$ converge per $x > -\frac{1}{2}$

15. Determinare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ per cui sono convergenti le seguenti serie

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{|x|}{x^2+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{6}{|x|}\right)^{n-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\ln x}{\ln x - 1}\right|^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x+2}\right)^n$

16. Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini positivi:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{\sin^2 n + \sin n + 7}{3^{n+2}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}\, x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sin\frac{1}{n} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!}$

Limiti e continuità

1. Si calcolino i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 3} (2x+1)$

(b) $\lim_{x\to 2} \left(x^2+3x-5\right)$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-4x+6}{x^2-9}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-4x+4}{x^2-4x-1}$

(e) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+2}{2x-5}$

(f) $\lim_{x\to -1} x^2 e^{2x+1}$

(g) $\lim_{x\to -1} e^{2x+1}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x+2|}$

(i) $\lim_{x\to 3} x \ln(2x)$

(j) $\lim_{x\to 8} \frac{2x+1}{x+1}$

(k) $\lim_{x\to 0} 2^x$

(l) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-x+7}}{x+2}$

2. Si calcolino i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to -5} \frac{x^4+x^2+1}{x+5}$

(b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x+1}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+2x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^3-2x^2-4x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-8x^2+16x}{x}$

(f) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x}{h}$

(g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}$

(h) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

(j) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$

(k) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(l) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(m) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

(n) $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

(o) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

(p) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

(q) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

(r) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h}$

(s) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

(t) $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2}$

(u) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3}{x^3}$

(v) $\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{x^2-2}$

(w) $\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^2}$

(x) $\lim_{x\to -1} \frac{3x+12}{x^2+2x+1}$

3. Si calcolino i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^3-3x^2+4\right)$

(b) $\lim_{x\to -\infty} \left(x^2-1\right)$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{x^2+1}$

(d) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{x^3+1}$

(e) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^3+1}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3+14}{4x^5-2x^3+1}$

(g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5+14}{4x^5-2x^3+1}$

(h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^5+14}{4x^5-2x^3+1}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^5+14}{4x^5-12x^3+1}$

(j) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+14}{1-4x^2-2x^3}$

(k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}$

(l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

(m) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^7+14}{4x^7-2x^3+1}$

(n) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{3x+5}$

(o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+5}}{x+2}$

(p) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\right)$

(q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-\ln x}{x^3+1}$

(r) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{x^3-x+8}$

(s) $\lim_{x\to +\infty} (e^x+3x)$

(t) $\lim_{x\to +\infty} x\sqrt{e^{2x}+1}$

(u) $\lim_{x\to +\infty} x\ln x$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2}$

(w) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x}$

(x) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2-1}$

4. Dire se è possibile scegliere $a \in \mathbb{R}$ in modo che risulti:

(a) $\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{1+ax+x^2}-x\right] = 4$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left[2x-\sqrt{4x^2+ax}\right] = 7$

5. Siano f e g due funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{per } x \le 0 \\ -x^2 & \text{per } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{per } x \le 2 \\ -x+6 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

f è continua per $x=0$? g è continua per $x=2$?

6. Determinare i valori di x per cui ognuna delle seguenti funzioni è continua:

(a) $f(x) = x^5+4x^2$

(b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + 2x - 2}$ (f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

7. Per quali valori di a è f continua per ogni x?

   (a) $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{per } x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 5x - 1 & \text{per } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$

8. Dimostrare che ognuna delle seguenti *equazioni* ha almeno una radice nell'intervallo indicato:

   (a) $x^3 + 3x - 8 = 0$ in $]-2, 3[$
   (b) $x^6 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ in $]0, 1[$
   (c) $x^7 - 5x^5 + x^3 - 1 = 0$ in $]-1, 1[$
   (d) $\sqrt{x^2 + 1} = 3x$ in $]0, 1[$
   (e) $\sqrt{x^2 + 2} = 4x$ in $[0, 1]$.

9. Spiegare perché la funzione f definita per ogni $x \in [0, 5]$ da:

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 + 2}$$

   è dotata di massimo e di minimo. (*Non* tentare di calcolare questi valori)

10. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ per } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ per } x = \pm 1 \end{cases}$$

   (a) Disegnare il diagramma di $f(x)$. $f(x)$ assume massimo e minimo valore in $[-1, 1]$?
   (b) $f(x)$ è continua in $[-1, 1]$?

11. Sia $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ per } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ per } x > 1 \end{cases}$$

   (a) Disegnare il diagramma di $f(x)$
   (b) Dimostrare che $f(x)$ raggiunge il massimo e il minimo valore in $]0, \infty[$.

12. Per ciascuna delle funzioni $f(x)$ seguenti riportate dimostrare che esiste l'inversa $f^{-1}(y)$, e trovare una formola per $f^{-1}(y)$. Studiare la continuità di $f^{-1}(y)$.

   (a) $f(x) = x + 1$
   (b) $f(x) = \sqrt[5]{x + 1}$
   (c) $f(x) = x^3$
   (d) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 4}$
   (e) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

13. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^2 - x^4$. Dimostrare che esiste l'inversa f^{-1}, trovare una formola per $f^{-1}(y)$ e dire se tale funzione sia, o meno, continua.

Calcolo differenziale

1. Calcolate la derivata prima delle funzioni seguenti:

   (a) $f(x) = x + 2$
   (b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 7$
   (c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$
   (d) $f(x) = e^x + \ln x$
   (e) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{3}{x}$
   (f) $f(x) = x \ln x$
   (g) $f(x) = e^x \ln x$
   (h) $f(x) = \dfrac{8x^2 + 1}{x^3 - 8}$

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x$

(j) $f(x) = \dfrac{-2}{\ln x}$

(k) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$

(l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(m) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+1}$

(n) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(o) $f(x) = \sqrt{e^{2x}+1}$

(p) $f(x) = x\sqrt{e^{2x}+1}$

(q) $f(x) = \dfrac{\ln^2(2x+1)}{x^3}$

(r) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}-1}{e^{3x}-1}$

(s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{x+2}$

(t) $f(x) = \sqrt[3]{e^x \ln|x|}$

(u) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

2. Per ognuna delle seguenti funzioni stabilire se $f(x)$ è continua e differenziabile in $x = 0$:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se}\, x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 2 & \text{se}\ x < 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{se}\ \ x \leq 0 \\ \ln\sqrt{1+4x} & \text{se}\ \ x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+3) & \text{se}\, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2+6x+9}{18} & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$

3. Per ognuna delle seguenti funzioni trovare i punti stazionari e determinare per quali valori di x essa è crescente o decrescente:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$

(c) $f(x) = x - e^x$

(d) $f(x) = x + \ln x.$

4. Trovare imassimi e minimi per ognuna delle seguenti funzioni di x nell' intervallo specificato:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 8$, $[-1, 2]$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$, $[0, 5]$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+27}$, $[-4, 4]$

(d) $f(x) = (x-1)^3$, $[-1, 3]$

(e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$, $[-1, 3]$

(f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^4+1}$, $]-\infty, \infty[$

5. Decidere per quali valori di x le seguenti funzioni sono convesse e determinare gli eventuali punti di flesso:

(a) $f(x) = x^4$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

(d) $f(x) = x^2e^x$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{2}{3}x$

(f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

(g) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(h) $f(x) = 2x - 3 + 4\ln|x|$

(i) $f(x) = -2x + e^{-x}$

6. È data la funzione $f(x) = x^2(x-1)^3$, $x \in [0, 1]$. Mostrare che esiste un unico punto $p \in\,]0, 1[$ in cui $f'(p) = 0$ e che questo punto divide l'intervallo $[0, 1]$ in due segmenti, tali che il rapporto fra le loro lunghezze sia $2/3$

7. Trovare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) = 2x^2 - ax + b$ soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 1]$ indicando in quale punto dell'intervallo si annulli $f'(x)$

8. Si consideri la funzione $f(x) = \arctan|ax + 2|$, $x \in \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ parametro. Si indichi un valore di a per cui la funzione $f(x)$ risulta non derivabile in $x_0 = 1$. Dopo aver sostituito ad a il valore trovato si tracci il grafico della funzione così ottenuta.

9. Provare che, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ vale $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$

10. Studiare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il numero di radici dell'equazione trascendente $e^{1/x} = a\,x$

11. Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

(a) $f_1(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$

(b) $f_2(x) = x\sqrt{4-x^2}$

(c) $f_3(x) = \ln x^2 + 2 - x$

(d) $f_4(x) = x - \dfrac{3}{5}\sqrt{1+x^2}$

(e) $f_5(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

(f) $f_6(x) = (1-2x)\left(\ln(1-2x)\right)^2$

12. Determinare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = ax + \ln\left(1+x^2\right)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

13. Si deve recintare un terreno in forma rettangolare di area preassegnata $A\,m^2$. Un lato del terreno è posto di fronte ad una stada, si sa che il costo al metro per recintare insonorizzando è di €15 per metro, mentre gli altri tre lati possono essere recintati al costo di €10 per metro. Scegliere il modo per recintare l'area A al minimo costo.

14. Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione $f(x) = \dfrac{2\sqrt{|x|}-1}{2(1+x^2)}$

15. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{12x+1}e^{-x}$:

    (a) determinare i suoi punti di massimi e minimo relativo

    (b) dimostrare che essa ha un solo punto di flesso x_φ

    (c) usare il metodo di Newton per far vedere che $x_\varphi \simeq 0,600347$

16. Calcolare la derivata prima $f^{-1}(y_0) = f^{-1}\left(f(x_0)\right)$ se $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

17. Usando il teorema della derivata nulla far vedere che per ogni $-1 \le x \le 1$ vale:

$$\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

18. Dire se esistono valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x) = \left(2\,a + (a-2)\;x + x^2\right)\,e^{-x}$ è sia strettamente convessa che strettamente decrescente.

19. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3 - ax^2 + x - 2a$ è strettamante crescente. Studiare poi, sempre in dipendenza dal parametro $a \in \mathbb{R}$, il numero delle radici dell'equazione $f(x) = 0$

20. Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ abbia un flesso in $x = 1$

21. Determinare i valori di a, b, $c \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ abbia un punto stazionario in $(1;5)$ e un flesso in $(2;3)$

22. Determinare gli intervalli di convessità della funzione $f(x) = 2x^6 + 9x^5 + 10x^4 - 13x - 5$

23. Grafico della seguenti funzioni nel loro dominio naturale

    (a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 1}$

    (b) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 1}$

    (c) $f(x) = \ln\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|$

    (d) $f(x) = \sqrt[3]{|x|^2}\;(x-1)^4$

    (e) $f(x) = \sqrt[5]{x\,(x^2-1)^2}$

    (f) $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$

    (g) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x} - \ln x$

    (h) $f(x) = \dfrac{6}{5}\,x + \ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$

    (i) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 4$

    (j) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

    (k) $f(x) = x^3 - 4x + 16$

    (l) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + 7\arctan x - x$

24. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \ln(1+x^2) - \dfrac{a}{2}x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$?

25. Studiare in dipendenza da $a \in \mathbb{R}$, il numero delle radici delle equazioni

(a) $x^3 - 4a\,(x-1)^2 = 0$

(b) $x^4 + \dfrac{4}{3}ax^3 - 4a^2x^2 + 16 = 0$

(c) $\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = a$

(d) $f(x) = x^3 - 5ax^2 + ax + 3$

26. Data l'equazione $x^2 + (a-1)x - (a+3) = 0$, $a \in \mathbb{R}$ è un parametro, dopo aver dimostrato essa ha, sempre e comunque radici reali, indipendentemente dalla scelta di $a \in \mathbb{R}$, indicare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ è minima la somma dei quadrati delle radici

27. Sia $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$. Dire quanti e quali sono i punti in cui $f(x)$ verifica la tesi del Teorema di Rolle

28. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il dominio naturale della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x - \ln x + a}$ è $]0, \infty[$

29. È data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se}\, x \neq 0 \\ 0 & \text{se}\, x = 0 \end{cases}$$

(a) è continua in $x_0 = 0$?

(b) è derivabile in $x_0 = 0$?

(c) verifica il teorema di Darboux?

30. Tramite l'opportuno teorema di De L'Hospital calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{4x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^3-x^2+5x-5}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1-x}{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1-mx}{x^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)}{(e^x-1)^2}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x(e^x-1)}$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+2x}}{x}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2+e^{-3x}}{x}$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln|x|$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} xe^{\frac{1}{x}}$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^p \ln x$, $p > 0$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^7+6x^2+3}{x^8+2x+7}$

(z) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^{x^2}-1}{x^{20}}$

31. Tramite l'opportuno teorema di De L'Hospital calcolare i limiti delle seguenti forme indeterminate

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^8 x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^p x}{x}$, $p > 0$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{17}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p}$, $p > 0$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{e^x}$

32. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n^4\right) \arccos \sin n$

33. Sia $a \geq 0$. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}\sqrt{|a^2 - x^2|}$, $x \in \mathbb{R}$. Si dimostri che esiste $M(a) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ e si calcoli $\lim_{a\to 0^+} M(a)$

34. Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la retta $y = x + 2$ si tangente alla funzione $f(x) = \dfrac{2ax + a^2}{3x + 2a}$ nel punto di ascissa $x = 1$

35. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \ln \dfrac{x}{1 + x^2}$ è crescente su $[1, \infty[$?

36. Dimostrare che per ogni $x > 0$ vale $x^x \geq x$

37. Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = x^4 - 5x^2 + 4$

38. Sia $f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. Determinare $a_0, \dots, a_4$ sapendo che:
    (a) $f(0) = 0$
    (b) $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$
    (c) Nel punto di ascissa $x = -1$ il grafico di $y = f(x)$ ha tangente parallela alla retta di equazione $y - x$

39. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (2 - a)x^4 + 4ax^3 + (1 + a)x^2 + 3$ è convessa in $\mathbb{R}$?

40. Dimostrare che, per ogni $x \in [-1, 1]$ vale $\arccos u = 2 \arccos \sqrt{\dfrac{u+1}{2}}$

41. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x}$, $x \neq 0$.
    (a) $f(x)$ è invertibile in $]0, \infty[$?
    (b) $f(x)$ è invertibile in $]-\infty, 0[$?

42. Grafico della funzione $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$, $x > 0$.

43. Grafico della funzione $f(x) = x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, $x \neq -1$.

44. Determinare a, $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x+1| - (x+1)^2, & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2x+a}{2x+b}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 1$. Si tracci poi il grafico della funzione così ottenuta.

45. Studiare la funzione $f(x) = x^2 \sin(\pi x)$, $x \in [-1, 1]$

46. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sin x\, e^{-a\,x}$ è:
    (a) crescente?
    (b) convessa?

47. Sudiare la funzione $f(x) = \max\left\{\dfrac{x}{1+x^2}, \dfrac{x^3}{1+x^2}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) $f(x)$ è continua in $x = 1$?

(b) $f(x)$ è derivabile in $x = 1$?

48. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(2)}(x) = 0$. Provare che $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)] = 0$

49. Studiare la funzione $f(x) = \max\limits_{t\in[0,x]} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t\right)$, $x > 0$

50. Dimostrare che per ogni x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ risulta:

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y-x}{1+x^2}.$$

Suggerimento: posto $f(t) = \arctan t$ si applichi il teorema del valor medio a $f(t)$ nell'intervallo $[x, y]$

51. Dimostrare che se $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ si ha che:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \le \frac{4}{b-a} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \frac{b-a}{2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

52. Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ vale $\operatorname{arccosh} x = 2 \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

Calcolo integrale

1. Calcolare i seguenti integrali definiti

(a) $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x}\, dx$

(b) $\int_2^3 \frac{5}{2x}\, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx$

(d) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x}\, dx$

(e) $\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\, dx$

(f) $\int_0^2 x\sqrt{x}\, dx$

(g) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\, dx$

(h) $\int_0^1 5e^{-3x+6}\, dx$

(i) $\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx$

2. Trovare tutte le funzioni primitive $F(x)$ tali che:

(a) $F'(x) = -(x-1)^2$

(b) $F'(x) = \frac{1}{2} - 2x$

(c) $F'(x) = 4 - x^2$ e $F(0) = 1$.

(d) $F'(x) = x(1 - x^2)$ e $F(0) = \frac{1}{2}$

(e) $F'(x) = e^{-x} + x^2$ e $F(0) = 2$

(f) $F'(x) = e^{2x} + x^3$ e $F(0) = 2$

3. Se $F'(x) = x + 1$ e $F(0) = 2$, quanto vale $F(3)$?

4. Calcolare l'area sottesa al diagramma di $f(x)$ su $[a, b]$:

(a) $f(x) = x^2 + x$, $[a, b] = [1, 3]$

(b) $f(x) = (x+3)^2$, $[a, b] = [-4, -1]$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[a, b] = [1, 8]$

(d) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $[a, b] = [1, 4]$

(e) $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b] = [1, 4]$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$, $[a, b] = [1, 2]$

5. Si consideri la regione chiusa $\mathcal{S}$ delimitata dalle curve assegnate, e dalle indicate parallele $x = a$, $x = b$ all'asse y. Fare prima un disegno di $\mathcal{S}$ e poi calcolarne l'area:

(a) $y = x - x^2$, $y = -x$; $[0, 2]$
(b) $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $[0, 1]$
(c) $y = x^{\frac{1}{2}}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $[0, 2]$
(d) $y = x\left[x^2 - 1\right]$; $y = x$; $\left[-1, \sqrt{2}\right]$
(e) $y = x$, $y = x^2 - 2x$; $[0, 2]$
(f) $y = \dfrac{1}{x+1}$; $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; $[0, 1]$
(g) $y = e^x$, $y = \ln x$; $[1, 2]$

6. Calcolare i limiti seguenti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$
(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^x \ln(t^2+1)e^{t^2} dt}{x}$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^x t^2 e^{t^2} dt}{x}$
(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{t} dt}{\ln x}$
(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{5x} t^8 \ln(3t^2+1) dt}{x^3}$
(f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{t} dt}{x^2}$

7. Mediante integrazione per parti calcolare:

(a) $\displaystyle\int xe^x dx$
(b) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$
(c) $\displaystyle\int x^3 e^x dx$
(d) $\displaystyle\int xe^{-x} dx$
(e) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$
(f) $\displaystyle\int x^3 e^{-x} dx$
(g) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$
(h) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$
(i) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$
(j) $\displaystyle\int \ln x \, dx$
(k) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$
(l) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
(m) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
(n) $\displaystyle\int xe^{2x} dx$
(o) $\displaystyle\int \frac{x}{e^{3x}} dx$
(p) $\displaystyle\int 3x^2 e^{3x} dx$
(q) $\displaystyle\int x \ln(x+1) dx$
(r) $\displaystyle\int x^2 \ln(x+3) dx$
(s) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-3)^3} dx$
(t) $\displaystyle\int \frac{5x}{(x-1)^2} dx$
(u) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^4} dx$
(v) $\displaystyle\int x \sin(\pi x) \, dx$
(w) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

8. Calcolare mediante opportuno combio di variabili:

(a) $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2} dx$
(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$
(c) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$
(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^{-x^2} dx$
(e) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^{50} x dx$
(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x-3}{x^2-3x-4} dx$
(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$
(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$
(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+3} dx$
(j) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x+2} dx$
(k) $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx$
(l) $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
(m) $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$
(n) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$
(o) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
(p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$
(q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$
(r) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x^3 e^{-x^2} dx$
(s) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{8x+5} dx$
(t) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{(2x+3)^2} dx$
(u) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(4x-3)^3} dx$

9. Calcolare gli integrali:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
(b) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$
(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$
(d) $\displaystyle\int_3^4 \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$

(e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}dx$ (g) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ (i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$ (k) $\displaystyle\int_0^1 (11x+6)^7\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$ (h) $\displaystyle\int_0^1 x^5e^{-x^2}dx$ (j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ (l) $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\ln x\,dx$

10. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte usando la scomposizione in frazioni parziali:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+3}{x(x-1)}dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-7x+10}dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-5x+6}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{10}{x^2-3x-4}dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2}{x^2-4}dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-3x-4}dx$

11. Calcolare una primitiva della funzione $y = x\left(3x^2+4\right)^{-1}$

12. Calcolare l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln\sqrt{x^2}dx$

13. Calcolare una primitiva della funzione $y = \dfrac{4x\left(x^2+1\right)}{2x^4+2x^2+5}$

14. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x}{x^2+1}dx$

15. Determinare un numero reale k ed una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali per cui risulti:

$$\int_1^x f(u)du = x\ln\left(x^2+1\right)+k$$

16. Calcolare una primitiva della funzione $y = \sinh(\ln x)$

17. Determinare tutti i valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ per i quali è crescente su $[2,5]$ la funzione:

$$f(x) = \int_2^x (u-\lambda)(u-2)\,du$$

18. Calcolare $\ell = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\int_1^x \left(e^{u-1}-1\right)du}{\int_1^x \ln u\,du}$

19. Si indichi con $A(m)$ l'area della parte di piano delimitata dalle curve di equazioni $y=x$, $y=x^m$, $x=0$ e $x=1$. Determinare per quali valori di $m\in\mathbb{R}$ si ha $A(m)=\frac{1}{3}$.

20. Si consideri la funzione $f:\left[0,\sqrt{3}\right]\to[1,10]$, $f(x)=x^2+1$. Dopo aver provato che f è invertibile calcolare:

$$\int_1^{10} f^{-1}(y)dy$$

21. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$

22. Si indichi con $M(t)$ il valor medio integrale della funzione $f(x)=\frac{1}{x+4}$ nell'intervallo $[0,t]$, $t>0$. Calcolare $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t)$

23. Determinare l'insieme A di tutti i valori del parametro reale positivo a per i quali vale 36 l'area della figura delimitata dall'asse x e dal grafico della parabola di equazione $y=x^2-(a-2)x-(a-1)$

24. Sia $f(x) = \int_1^{3x} \frac{1}{1+t+t^2} dt$.Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$.

25. Sia $f(x) = \int_0^{x} \frac{t^2-4}{1+\cos^2 t} dt$. Si trovino e si classifichino i massimi ed i minimi relativi di f.

26. Sia $f(x) = \int_{x^2}^{2} \sqrt{t+1}dt$. Si calcoli $f'(x)$.

27. Calcolare $\int_{-3}^{4} ||x|-4|\, dx$

28. Sapendo che $\int_0^3 f(x)dx = 12$, $\int_0^6 f(x)dx = 42$, si calcoli $\int_3^6 (f(x)-3)\, dx$

29. Risolvere e discutere l'equazione $\int_0^1 t^x dt = 5$

30. Provare che $\int_{-1}^{0} \frac{4x^2-8x+1}{(x-1)^2} dx = \frac{5}{2}$

31. Provare che $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(2x)\cos^4(2x)dx = \frac{1}{35}$

32. Provare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx = \frac{1}{12}$

33. Provare che $\int_0^1 \ln \frac{x+1}{x+2} dx = \ln \frac{16}{27}$

34. Provare che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx = \frac{2}{5}\left(1+e^{-\pi/2}\right)$

35. Provare che $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

36. Provare che $\int_0^1 x\sqrt{1+5x^2}dx = \frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{1}{15}$

37. Provare che $\int_0^1 x^2\sqrt{2+x^3}dx = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{2}}{9}$

38. Provare che: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2} dx = 3-2\sqrt{2}$

39. Calcolare $\int_0^1 x^3\sqrt{4+x^2}dx$

40. Calcolare $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx$

41. Calcolare $\int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{10-x}} dx$

42. Calcolare $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$

43. Calcolare $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$

44. Si ponga $\mathcal{I}_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}$, essendo $a \in \mathbb{R}$ un fissato reale. Si dimostri che per $n \geq 2$ vale:

$$n\,\mathcal{I}_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a2} - (n-1)a^2\mathcal{I}_{n-2}(x). \qquad (*)$$

Si usi $(*)$ per dimostrare che:

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^2+5}}dx = \frac{168}{5} - 40\sqrt{\frac{5}{3}}$$

45. Dalla relazione $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}dt$, dedurre, mediante opportune sostituzioni l'identità:

$$\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$$

46. Dimostrare che, per ogni $x > 0$ vale $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$

47. Sia $\mathcal{F}(x; m, n) = \int_0^x t^m(1+t)^n dt$, m, $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

$$(m+1)\mathcal{F}(x; m, n) + n\mathcal{F}(x; m+1, n-1) = x^{m+1}(1+x)^n \qquad (**)$$

Si usi $(**)$ per calcolare $\mathcal{F}(x; 10, 2)$

48. Studiare i seguenti integrali impropri:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$
(b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$
(c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$
(d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$
(e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
(f) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$
(g) $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$
(h) $\int_0^{+\infty} e^x dx$
(i) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$
(j) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
(k) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$
(l) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$
(m) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$
(n) $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$
(o) $\int_{-\infty}^0 xe^{7x}dx$
(p) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
(q) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$
(r) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$
(s) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
(t) $\int_0^{+\infty} (x^5+1)^{-20}x^4 dx$
(u) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-x^4}dx$

49. Studiare la funzione $f(x) := \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t\ln t}$ per $x \in [0, \infty[$, tracciandone un grafico approssimativo

50. Calcolare

(a) $\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-nx^2}dx$
(b) $\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xe^{-nx^2}dx$

51. Sia $\alpha > 0$ fissato: calcolare $\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\,dx$

52. Si consideri la successione (x_n) definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_n = \int_0^{x_{n-1}} e^{-t^2}dt, \ n \geq 2 \end{cases}$$

Provare che $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. (Far vedere che $x_n \leq x_{n-1}$ e che $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

53. Trovare delle costanti a, $b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{bx - \sin x} \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt = 1$

54. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ per cui risulti, per ogni $x \geq 0$ $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x + 1$. Calcolare $f(2)$

55. Calcolare gli integrali:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

56. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ per cui risulti, per ogni $x \geq 0$ $\displaystyle\int_0^{3x} f(t)dt = \sin x + \cos x$. Calcolare $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

57. Se $\sqrt{3} < a < b$ si calcoli $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{x^4 - 4x^2 + 3} dx$. È suggerita la sostituzione $x^2 = t$

58. Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x^2 t)}{1 + \sin^2(x^2 t)} dt$

59. Calcolare gli integrali:

(a) $\displaystyle\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 3} dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx$

60. Sia $0 < x < 1$. Calcolare $\displaystyle\int_0^x t^2 \ln \sqrt{1-t} dt$ e successivamente si calcoli $\lim\limits_{x\to 1^-} \displaystyle\int_0^x t^2 \ln \sqrt{1-t} dt$

61. Determinare il dominio naturale della funzione $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{x - s}$

62. Si consideri la scrittura $\displaystyle\int_b^x \frac{a}{t+b} = \ln(x+1)^2 + 5$. Per quali valori di a, $b \in \mathbb{R}$ può essere vera?

63. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3(1 + \cos x)\sin(2x) + 8 \sin x}{2 \cos x \left(3 + 2\cos x - \sin^2 x\right)} dx$