Continuità

Si dice che una funzione f è continua in un punto interno c del suo dominio se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Se $\lim_{x \to c} f(x)$ non esiste oppure esiste ma NON è uguale a $f(c)$, allora si dice che f è discontinua in c. In termini grafici si può dire che f è continua in un punto interno c del suo dominio se si può tracciare il grafico senza sollevare la pena dalla carta. (figure)

Si parla di continuità a destra o a sinistra rispettivamente se $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ o $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. La funzione di Heaviside ($sgn(x)$) è continua a destra ma non a sinistra in 0 e ovviamente non è continua in 0(figura). In generale una funzione è continua se e solo se è continua a destra e a sinistra nel punto considerato.

Continuità nei punti estremi al dominio: si dice che f è continua in un estremo sinistro c del dominio se è continua a destra in tale punto; viceversa è continua in un estremo destro c se è continua a sinistra in tale punto. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \sqrt(4 - x^2)$$

ha dominio $[-2, 2]$. Essa è continua nel punto estremo destro 2 poichè è continua a sinistra in quel punto: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 = f(2)$. La stessa cosa si può dire perl'estremo destro. E' inoltre continua in ogni altro punto del dominio.(figura)

Continuità in un intervallo: f si dice continua in un intervallo I se è continua in ogni punto di I. In particolare f è una funzione continua se è continua in ogni punto del suo dominio. Ad esempio $f(x) = \sqrt{(}4 - x^2)$ è continua in ogni punto del suo dominio. E' continua anche negli estremi del dominio sia a destra che a sinistra.(figura)

Anche la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua perchè il numero 0 non appartiene al dominio. Se definissimo la funzione anche in 0 assegnandole un valore questa diventerebbe discontinua.(figura)

Le funzioni continue sono molto numerose. Nel loro dominio di definizione sono continue: tutti i polinomi, tutte le funzioni razionali, tutte le potenze razionali ($x^{\frac{m}{n}}$ con m, n interi), le funzioni trigonometriche seno, coseno, tangente, la funzione valore assoluto.(figure)

Inoltre se f e g sono continue in un punto c allora lo sono anche:

- la somma e la differenza delle due, $f \pm g$
- il prodotto fg
- la moltiplicazione per una costante kf, k numero
- il quoziente f/g (a condizione che non si annulli il denominatore)
- la radice n-esima $((f(x))^{1/n})$ a condizione che $f(c) > 0$ se n è pari.

Per dimostrare queste affermazione si usa la definizione di continuità, ad esempio:

$$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c).$$

Anche la composizione di funzioni continue è continua, ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{|x+2|}}$$

è continua ovunque nel rispettivo dominio, in quanto composizione e combinazione di funzioni continue.

Discontinuità rimovibili:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

non è definita per $x = 1$ ma ha un'estensione continua in quel punto. Infatti anche se $f(1)$ non è definita, si ha per $x \neq 1$ la semplificazione

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$$

e quest'ultima è continua anche in $x = 1$ dove assume valore $1/2$. Le due funzioni hanno lo stesso grafico ma la seconda non ha il "buco" in $x = 1$.(figura)

Asintoti

La parola asintoto ha origine greca e significa "che non si incontra"; essa rappresenta una retta a cui la funzione si avvicina man mano che l'incognita tende ad un determinato punto che può essere anche $\pm\infty$.

Supponiamo che c sia un estremo del dominio della funzione f. Si parla di asintoto verticale destro se

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$

e di asintoto verticale sinistro,

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty.$$

Se esistessero entrambi la retta verticale $x = c$ prenderebbe il nome di asintoto e questo esisterebbe anche se limite destro e sinistro avessero segno opposto. Esempi:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2}.$$

(figure)

Se $+\infty$ fosse un estremo del dominio della funzione f e si avesse

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L1$$

si parla di asintoto orizzontale destro. Viceversa se

$$\lim_{x\to-\infty} = L2$$

si parla di asintoto orizzontale sinistro. Anche in questo caso se $L1 = L2 = L$ cioè i limiti coincidono, la retta orizzontale $y = L$ è l'asintoto orizzontale. Esempi:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad e^{-x^2}$$

(figure)

Si parla infine di asintoto obliquo se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

ed esiste una retta per cui

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

Per calcolare un asintoto obliquo però la procedura non è semplice come nei casi precedenti: si calcola se ha senso il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

se è infinito si va avanti altrimenti non esiste alcun asintoto obliquo.

Si calcola successivamente il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},$$

se è un numero reale $m \neq 0$ si va avanti altrimenti non esiste alcun asintoto obliquo.

Infine si calcola, se ha senso, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx,$$

se è un numero reale q, allora la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo (in questo caso destro).

Derivate

La pendenza di una retta è la stessa in tutti i suoi punti mentre la pendenza di una qualsiasi funzione $f(x)$ può variare da punto a punto. In ogni punto x in cui il grafico ha una pendenza finita si può associare ad esso una funzione che ne misura la pendenza. In questo caso la funzione si dice differenziabile o derivabile e la sua pendenza è la derivata di f.

Definizione: La derivata di una funzione f è un'altra funzione f' definita nel modo seguente:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

in tutti i punti x in cui il limite esiste (cioè è un numero reale finito). Se f' esiste allora si dice che f è differenziabile in x. In pratica il dominio della nuova funzione f' è l'insieme degli x in cui il grafico di f ha una retta tangente non verticale. In generale il dominio della derivata è più piccolo o uguale a quello della funzione di partenza e i valori in cui f non è differenziabile sono chiamati punti singolari di f. (figure funzione, rette tangenti)

L'equazione della retta tangente in un punto x_0 è data dalla seguente equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Osservazione: il valore della derivata di f in un punto x_0 può essere espresso come limite nei 2 modi seguenti:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in cui, nel secondo limite, $x_0 + h$ è sostituito da x, $h = x - x_0$ e $h \to 0$ è equivalente a $x \to x_0$. (figure esempi di derivazione grafica)

Derivata di una funzione lineare: se $f(x) = ax + b$ allora $f'(x) = a$ quindi nel caso di

$$\underbrace{f(x) = x, \quad f'(x) = 1}$$

(figura) Il risultato è evidente dal grafico di f ma usando la definizione si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Un caso particolare è la derivata di una funzione costante che è nulla:

$$\underbrace{f(x) = c(\text{costante}), \quad f'(x) = 0}$$

Usiamo la definizione di derivata per calcolare alcune derivate:

$$f\,\underbrace{(x) = x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x} \quad \underbrace{g(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; g'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

$$\underbrace{k(x) = \sqrt(x) \;\Rightarrow\; k'(x) = \frac{1}{2\sqrt(x)}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nell'ultimo caso f non è differenziabile in $x = 0$ anche se 0 appartiene al dominio di k (nel caso precedente, 0 non apparteneva neanche al dominio di g) quindi per k, 0 è un punto singolare.

I generale la derivata di una potenza x^r, $\forall r \in \mathbb{R}$, è data da

$$\underbrace{f(x) = x^r \;\Rightarrow\; f'(x) = rx^{r-1}}.$$

Esempi:

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; g'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \;\; (t > 0)$$

Derivata della funzione valore assoluto (figura):

$$f(x) = |x| \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{x}{|x|} = sgn(x)$$

in cui $x = 0$ è un punto singolare per f essendo la funzione non derivabile. Infatti,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \;\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Notazione di Liebniz: se $y = f(x)$ si può scrivere la sua derivata nei diversi modi,

$$y' = f'(x) = D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x)$$

ad esempio,

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x.$$

Se si vuole valutare questa in un punto, ad esempio in $x = 1$, si scrive,

$$\left.\frac{d}{dx} x^2\right|_{x=1} = \left. 2x\right|_{x=1} = 2.$$

La notazione di Liebniz è suggerita dalla definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(figura)

Teorema: la differenziabilità implica la continuità ma NON viceversa.

Proof. Se f è derivabile,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

cioè esiste; f è continua se

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

ma

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h \right) =$$

$$= f(x) + f'(x) \cdot 0 = f(x)$$

$\square$

Il viceversa è falso ed un controesempio è la funzione $f(x) = |x|$ continua ovunque ma non derivabile in 0.

Algebra delle derivate:

se f e g sono differenziabili in x e c è una costante, valgono:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(cf(x))'(x) = cf'(x)$

Derivata del prodotto:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Proof.

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) =$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$\square$

Derivata del quoziente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Derivata del reciproco:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

(segue dalla derivata del quoziente con $g = 1$).

Esempi:

siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 + 4$:

$$\frac{d}{dx}((x^2+1)(x^3+4)) = 2x(x^3+4)+(x^2+1)(3x^2) = 5x^4+3x^2+8x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt(x)}{3-5x}\right) = \frac{(3-5x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}(-5)}{(3-5x)^2} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x}(3-5x)^2}$$

Derivate delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

in altri termini se $y = f(x)$ e $u = g(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Esempi:
determinate la derivata di $y = \sqrt{x^2+1}$;

$$y = f(g(x)) \qquad \text{con } f(u) = \sqrt(u) \text{ e } g(x) = x^2 + 1$$

allora

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad g'(x) = 2x$$

usando la regola sopra:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Derivate delle funzioni trigonometriche:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

Proof.

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\sin(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} =$$

$$= (\sin(x))\cdot 0 + (\cos(x))\cdot 1 = \cos(x)$$

□

con lo stesso metodo si prova che

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Esempio:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} =$$

con la regola del quoziente,

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Derivate di funzioni esponenziali e logaritmiche: valgono le seguenti,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0.$$

In generale, se $a > 0$ reale vale l'uguaglianza, $a^x = e^{x\ln(a)}$ quindi derivando e usando la regola della composizione,

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln(a)} = \ln(a)e^{x\ln(a)} = a^x\ln(a)$$

Mentre per i logaritmi in base generica vale la seguente:

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Derivate delle funzioni trigonometriche inverse:

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Teorema del valore medio:

Supponiamo che f sia una funzione continua e derivabile nell'intervallo aperto (a, b), allora esiste un punto c interno a questo intervallo tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

(figura)

Il teorema non fornisce nessuna informazione riguardo al punto c ma ne afferma solo l'esistenza.

Per dimostrare il teorema del valore medio si ricorre ai teoremi di Rolle e di Weiestrass:

Teorema di Weiestrass: se f è una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ allora esistono x_1, x_2 in cui la funzione assume rispettivamente minimo e massimo.(figura)

Teorema di Rolle: sia g è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, e differenziabile nei punti interni $]a, b[$. Se $g(a) = g(b)$ allora esiste un punto c in $]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$.(figura)

Proof. Supponiamo che g non sia costante altrimenti in ogni punto $g'(x) = 0$. Per il teorema di Weiestrass deve esistere internamente all'intervallo un punto di massimo o di minimo che non sia un estremo quindi in quel punto la derivata è nulla essendo la retta tangente di coefficiente angolare nullo. □

Infine il teorema del valore medio si dimostra usando il teorema di Rolle per la funzione g definita nel modo seguente:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

cioè è la distanza tra f e la corda che unisce $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Dal teorema di Rolle esiste un punto c tale che $g'(c) = 0$ quindi se

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

nel punto $x = c$ vale

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funzioni crescenti e decrescenti:

sia f definita in I intervallo e $x_1, x_2 \in I$ allora,

- se $f(x_2) > f(x_1)$ per ogni $x_2 > x_1$ si dice che f è crescente in I. In questo caso vale
$$f'(x) > 0.$$
- se $f(x_2) < f(x_1)$ per ogni $x_2 > x_1$ si dice che f è decrescente in I. In questo caso vale
$$f'(x) < 0.$$
- se $f(x_2) \geq f(x_1)$ per ogni $x_2 > x_1$ si dice che f è non decrescente in I. In questo caso vale
$$f'(x) \geq 0.$$
- se $f(x_2) \leq f(x_1)$ per ogni $x_2 > x_1$ si dice che f è non crescente in I. In questo caso vale
$$f'(x) \leq 0.$$

Una funzione crescente o decrescente in tutto l'intervallo deve assumere valori diversi in ogni punto ed è biunivoca mentre una funzione non decrescente o non crescente può essere anche costante e quindi non biunivoca.

Le assunzioni fatte sulla derivata di f si dimostrano usando il teorema del valore medio:

Proof. Se $x_1 < x_2$ in I, esiste c tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

per cui

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

Essendo $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2) - f(x_1)$ ha lo stesso segno di $f'(c)$ ed è nulla se $f'(c)$ è nulla, quindi tutte le affermazioni sopra sono vere è il segno della derivata determina la crescita o decrescita della funzione. □

Massimi e minimi relativi:

si dice che f ha un massimo (o minimo) locale $f(x_0)$ nel punto x_0 se esiste un numero $h > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq x_0)$ per ogni x nel dominio di f tale che $x - x_0 < h$. (figura)

Massimi e minimi assoluti:

si dice che f ha un massimo (o minimo) assoluto $f(x_0)$ nel punto x_0 se vale $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ per ogni x appartenente al dominio di f. (figura)

Localizzazione dei valori estremi:

un estremo può essere

- un punto critico di f cioè un punto in cui $f'(x) = 0$
- un punto singolare di f cioè un punto in cui $f'(x)$ non è definita
- un punto estremo del dominio

(figure)

Test della derivata prima nei punti critici interni al dominio.

Se f è continua e derivabile in x_0 punto critico ($f'(x) = 0$) e x_0 non è un estremo del dominio, allora:

- se esiste un'intervallo aperto $]a, b[$ contenente x_0 tale che $f'(x) > 0$ in $]a, x_0[$ e $f'(x) < 0$ in $]x_0, b[$, allora f ha un massimo locale in x_0.
- se esiste un'intervallo aperto $]a, b[$ contenente x_0 tale che $f'(x) < 0$ in $]a, x_0[$ e $f'(x) > 0$ in $]x_0, b[$, allora f ha un minimo locale in x_0.

Se invece $x_0 = a$ cioè è un estremo del dominio di f e f è continua e derivabile a destra in a, allora il segno della derivata in $]a, b[$ determina se la funzione ha minimo o massimo in a. Lo stesso vale per l'estremo b.

Se f' è positiva (o negativa) da entrambi i lati di un punto critico allora f non ha nè massimo nè minimo in quel punto. Infatti in un punto di massimo o minimo relativo interno al dominio la derivata si annulla ma NON è vero il viceversa.(figura)

Esempi: trovare gli estremi di $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ nell'intervallo $[-2, 2]$ (figura)

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

quindi i punti critici sono 0,1,-1. $f(0) = -3$, $f(1) = f(-1) = -4$. Non vi sono punti singolari. Studiando il segno della derivata nei vari intervalli, cioè studiando la disequazione

$$f'(x) = 4x(x-1)(x+1) > 0$$

si ottiene che la funzione è decrescente tra $]-\infty, -1[$, crescente tra $]-1, 0[$, decrescente tra $]0, 1[$ e crescente tra $]1, +\infty[$. Quindi $f(1)$ e $f(-1)$ sono minimi relativi (e anche assoluti) mentre $f(0)$ è un massimo relativo ma non assoluto perchè negli estremi 2 e -2 dell'intervallo preso in considerazione la funzione assume valori maggiori $f(2) = f(-2) = 5$.

Derivate di ordine superiore:

Se $y' = f'(x)$ è la derivata di $f(x)$ si definisce allo stesso modo la derivata di $f'(x)$ in tutte le varie notazioni:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = D_x^2 f(x)$$

Allo stesso modo si definiscono derivate terza, quarta, n-esima della funzione f. Ad esempio se $f(x) = x^3$, $f'(x) = 6x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ e dalla quarta ($f^{(4)}(x) = 0$) in poi tutte le derivate sono nulle. Nel caso generale del monomio x^n con n intero positivo, si ha

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))x^{n-k} =$$
$$= \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \text{ se } 0 \leq k \leq n \\ 0 \text{ se } k > n \end{cases}$$

Concavità e punti di flesso:

si dice che la funzione f (derivabile almeno due volte) ha concavità rivolta verso l'alto (convessa) in un intervallo aperto I se la sua derivata f' è una funzione crescente o ugualmente se la derivata f'' è positiva. Viceversa ha concavità rivolta verso il basso (concava) in I se f' è decrescente in I ovvero se f'' è negativa.

Un punto x_0 è detto di flesso se il grafico di $f(x)$ ha una retta tangente in x_0 e la concavità di f è opposta dalle due parti di x_0. (figure)

Se f ha un punto di flesso in x_0 ed esiste $f''(x_0)$ allora

$$f''(x_0) = 0$$

ma NON è vero il viceversa: la funzione $f(x) = x^4$ ha $f''(0) = 0$ ma non ha flesso in 0 bensì un punto di minimo.(figura)

Test della derivata seconda:

- se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora f ha un massimo locale in x_0.
- se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora f ha un minimo locale in x_0.
- se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ allora non si può trarre alcuna conclusione e per stabilire se in x_0 si ha un massimo, un minimo o un flesso occorre studiare il segno della derivata prima e seconda.