Limiti delle funzioni

Una funzione f definita su un insieme D e con valori nell'insieme S è una legge che assegna un unico elemento $f(x)$ in S a ciascun elemento x di D. La funzione è rappresentata dal simbolo f e si scrive

$$y = f(x)$$

Con questa notazione x è detta variabile indipendente, mentre y è la variabile dipendente e rappresenta l'immagine della funzione f, cioè l'insieme dei valori che può assumere la funzione f. Ad esempio la funzione

$$f(x) = x^2$$

ha come dominio tutto $\mathbb{R}$ e come immagine l'insieme dei numeri reali positivi $\mathbb{R}^+$. (figura)

Se il dominio non viene specificato si sottintende che il dominio consista di tutti i valori reali x per i quali $f(x)$ è un valore reale. Ad esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è definita nell'intervallo $D = [0, +\infty[$. La funzione $\frac{x}{x^2-4}$ è definita per ogni $x \neq \pm 2$ cioè

$$D =]-\infty, -2[\cup [-2, 2[\cup [2, \infty[$$

Il dominio della maggior pate delle funzioni sarà un intervallo o un unione di intervalli.

Una funzione è pari se $f(-x) = f(x)$ per ogni x appartenente al dominio di f, è dispari se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x appartenente al dominio di f. La funzione $f(x) = x^2$ è pari, le funzioni $f(x) = x$ e $f(x) = x^3$ sono dispari, mentre la funzione e^x non è nè pari nè dispari. (figure)

Se f e g sono funzioni possiamo definirne la somma, differenza, prodotto e rapporto mediante le formule:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ con } g(x) \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$$

Un'altra operazione che si può effettuare tra le funzioni è la composizione:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

A differenza delle altre operazioni elementari sulle funzioni la composizione NON è commutativa in generale cioè

$$f(g(x)) \neq g(f(x))$$

Esempio: siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

$$f(g(x)) = f(x+1)$$

Ora sappiamo che f agisce ne seguente modo

$$f(\square) = \square^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(\boxed{x+1}) = \boxed{x+1}^2 = x^2 + 2x + 1.$$

A sua volta

$$g(f(x)) = g(x^2)$$

$$g(\boxed{x^2}) = \boxed{x^2} + 1 = x^2 + 1 \neq x^2 + 2x + 1.$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è detta monotona crescente (o decrescente) se

$$\forall x < y, \; f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y))$$

.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è invertibile se

$$\forall y \in f(A) \subseteq \mathbb{R}, \; \exists!\, x \in A : f(x) = y.$$

In tal caso si può definire $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ che verifica $f^{-1} \circ f = Id_A$ e $f \circ f^{-1} = Id_{f(A)}$.

Teorema: se f è strettamente monotona allora è invertibile. Il viceversa è vero solo se f è continua.

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ cioè definita su tutti i numeri reali non è invertibile mentre, la stessa f :

$[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ definita solo sull'insieme dei numeri positivi è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[\quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

.

$$f(x) \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(x) \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{(x^2)} = x$$

Una definizione non rigorosa di limite potrebbe essere questa: se una funzione è definita ovunque tranne in un certo punto x_0 ma si può garantire che prendendo x molto vicino a x_0 la funzione si avvicina sempre di più ad un certo valore L (che può essere anche $\pm\infty$), allora

$$\lim_{x\to x_0} = L.$$

Limite destro e sinistro:

se $f(x)$ è definita in un intervallo (a, b) e possiamo assicurare che $f(x)$ sufficientemente vicino a b assume un valore vicino ad L prendendo x a sinistra di b si dice che $f(x)$ ha limite sinistro L in $x = b$ e si scrive

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = L$$

Analogamente se la stessa funzione assume un valore M se x è sufficientemente vicino ad a prendendo x a destra si dice che f ha limite destro M in $x = a$ e si scrive

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = M.$$

Se i limiti destro e sinistro in un stesso punto coincidono si dice che f ammette limite in quel punto. Ad esempio la funzione

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

non ha limite nel punto $x = 0$ poichè limite destro e sinistro non coincidono.(figura)

Un'altra funzione che non ha limite in $x = 0$ è $f(x) = \frac{1}{x}$: se x tende a 0 da destra la funzione cresce sempre di più verso $+\infty$ mentre se x tende a 0 da sinistra la funzione cresce sempre in valore assoluto ma è a termini negativi quindi tende a $-\infty$. (figura)

Una funzione definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \neq 2 \\ 1 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

ammette limite in $x \to 2$ anche se

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$$

infatti il limite da destra e da sinistra coincidono.(figura)

Definizioni formali di limite:

Si dice che $f(x)$ tende al limite L quando x tende ad a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se è vefificata la seguente condizione: per ogni numero $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, dipendente da ϵ tale che

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

.(figura)

Si dice che $f(x)$ ha limite destro L in a, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se per ogni numero $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$, dipendente da ϵ tale che

$$a < x < a + \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon$$

(figura). Allo stesso modo si definisce il limite sinistro.

Si dice che $f(x)$ tende ad L quando x tende all'infinito, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero R, dipendente da ϵ, tale che

$$x > R \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Si dice che $f(x)$ tende all'infinito per x che tende ad a, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se per ogni numero reale positivo B si può trovare un $\delta > 0$, dipendente da B tale che

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > B.$$

Un esempio: verificare che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Sia $B > 0$ qualsiasi, allora

$$\frac{1}{x^2} > B \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{B}$$

se si prende $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ allora

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad x^2 < \delta^2 = \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > B$$

Regole per il calcolo dei limiti:
Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ allora,

- limite della somma: $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
- limite del prodotto: $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$
- moltiplicazione per una costante k: $\lim_{x \to a} kf(x) = kL$
- limite del quoziente: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$
- limite della potenza: $\lim_{x \to a}(f(x))^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ per m intero e n intero positivo
- ordinamento dei limiti: se $f(x) < g(x)$ in un intervallo contenente il punto a allora $L \leq M$

Il calcolo dei limiti può essere semplice in alcuni casi in cui basta valutare la funzione nel punto in cui si vuole calcolare il limite, ad esempio $\lim_{x \to a} x = a$. Oppure se c è una costante, $\lim_{x \to a} c = c$.

Il problema si ha quando nella semplice sostituzione si incontrano forme indeterminate:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty \cdot 0 \quad +\infty - \infty \quad 0^0 \quad 1^{\infty}$$

Ad esempio per il calcolo del seguente limite non si ha nessun problema e si applicano alcune delle regole descritte sopra:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{2x+1} = \sqrt{5}$$

Caso di polinomi e funzioni razionali:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{0}{0}$$

sostituendo semplicemente si ottiene una forma indeterminata e quindi occorre procedere in un altro modo: si fattorizzano numeratore e denominatore, infatti poichè i due polinomi si annullano per $x=3$ significa che 3 è una radice per entrambi:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x+3)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Occorre distinguere i 2 casi in cui il termine al numeratore è positivo o negativo: equivalentemente si calcolano i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1 \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$$

quindi il limite non esiste.

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x^2-(2-x^2)}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{(x+2)(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{(x+2)(x-2)}=+\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x+2)(x-2)}$$

non esiste.

Alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}=0\ \forall\alpha,\beta>0$$

Limiti all'infinito di funzioni razionali di polinomi:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Numeratore e denominatore dello stesso grado:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-(1/x)+(3/x^2)}{3+(5/x^2)}=\frac{2-0+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

Grado del numeratore minore del grado del denominatore:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(5/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

Grado del numeratore maggiore del grado del denominatore:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+(1/x)} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} x}{1+0} = \pm\infty$$

Quindi in generale, se

$$P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 \qquad Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$$

allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 \text{ se } m < n \\ \frac{a_m}{b_n} \text{ se } m = n \\ \pm\infty \text{ se } m > n \end{cases}$$

Comportamento di polinomi all'infinito: in generale il termine di grado più elevato di un polinomio domina gli altri termini quando diventa molto grande:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+1 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3+1 = -\infty$$

Funzioni irrazionali:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x} = (\sqrt{x^2} = x \text{ poichè } x > 0 \text{ per } x \to +\infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Altri esercizi sui limiti:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{1}{x}$$

Ricordando il limite notevole,

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

con un cambio di variabile $x^2 = t$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} 1 \cdot \frac{1}{x} =?$$

Poichè il limite destro e sinistro non coincidono questo limite non esiste anche se possiamo dire che in valore assoluto vale ∞.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

infatti $\cos x$ è una funzione limitata mentre il denominatore tende all'infinito

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \to 0} 1 \cdot \frac{1}{x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1$$

Alcuni esercizi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x - 3} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x}{2 - x} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x^2}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{3 - x} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{1}{(3 - x)^2} \qquad \lim_{x \to a^{\pm}} \frac{x^2 - a^2}{|x - a|}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{e^{-2(x^2 - 1)} - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|3x - 1| - |3x + 1|}{x} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

Continuità