Successioni e serie numeriche

Una successione è una lista ordinata avente un primo elemento ma priva dell'ultimo. I termini di una successione sono sempre numeri reali. Esempi di successioni:

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$$

la prima è la successione dei numeri interi la seconda è la successione delle potenze intere positive di $-\frac{1}{2}$.

Una successione $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ è in generale una funzione f che assume il valore $f(n) = a_n$ per ogni intero n ed ha quindi come dominio l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Essa può essere specificata dando una formula che specifica il termine generale a_n in funzione di n ad esempio i due casi precedenti possono essere riscritti:

$$\{n\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$$

oppure ancora

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}.$$

Un'altro modo per scrivere una successione è per ricorrenza cioè calcolare il termine a_n in funzione dei termini precedenti $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Un classico esempio di successione per ricorrenza è la successione di Fibonacci:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

e quindi $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$.

Una successione si dice limitata inferiormente dal numero L se $a_n \geq L\ \forall n \in \mathbb{N}$ e limitata superiormente da M se $a_n \leq M\ \forall n \in$

$\mathbb{N}$. Una successione si dice limitata se è limitata inferiormente e superiormente.

Una successione è rispettivamente crescente o decrescente se $a_{n+1} \geq a_n$ o $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Una successione crescente o decrescente è detta monotona. Una successione è oscillante se $a_n a_{n+1} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempi:

$\{n\}$ è positiva, crescente limitata inferiormente da 1 e non limitata superiormente.

$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$ è oscillante e limitata da $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ è positiva crescente ma limitata da 0 e 1.

$\{(-1)^n n\}$ è oscillante ma non limitata nè superiormente nè inferiormente.

Una successione può essere monotona anche solo da un certo n in poi, ad esempio:

$$\{\frac{n^2}{2^n}\} = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \ldots\}$$

è decrescente solo da a_3 in poi ed è quindi detta definitivamente decrescente. Allo stesso modo una successione puo essere definitivamente positiva o definitivamente oscillante.

Definizione.

Un'importanza fondamentale nello studio delle successioni è la convergenza di questa cioè il loro comportamento per n che tende a $+\infty$. Si dice che una successione converge al limite L, cioè

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

se per ogni numero reale positivo ϵ esiste un intero N tale che se $n \geq N$, allora $|a_n - L| < \epsilon$.

(figura)

Una successione può essere convergente a un numero L o divergente. Se è divergente può divergere a $\pm\infty$ o semplicemente divergere se il limite non esiste. Esempi:

$\{\frac{n-1}{n}\}$ converge a 1.

$\{n\}$ diverge a $+\infty$.

$\{-n\}$ diverge a $-\infty$.

$\{(-1)^n\}$ è limitata da -1 e 1 ma diverge, non ha limite.

$\{(-1)^n n\}$ diverge ma nè a $+\infty$ nè a $-\infty$.

Proprietà del limite: se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allora valgono

- $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$
- $$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$
- $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{supponendo} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$
- Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.
- Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$ allora $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Calcolo di alcuni limiti:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3}\right\}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per la potenza massima di n al denominatore cioè n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - (1/n) - (1/n^2)}{5 + (1/n) - (3/n^2)} = \frac{2 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{2}{5}$$

Quindi la successione converge.

$$\{a_n\} = \frac{n^2-4}{n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-(4/n)}{1+(5/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-0}{1+0} = +\infty$$

$$\{a_n\} = \frac{n^2}{n^3+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)}{1+(1/n^3)} = \frac{0}{1+0}$$

$$\{a_n\} = \{\frac{\cos(n)}{n}\}$$

Poichè $|cos(n)| \leq 1$ per ogni n allora $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$. Ma poichè entrambe le successioni $-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$ convergono a 0 anche quella in esse compresa covergerà a 0.

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n^2+2n}-n\}$$

In questo caso moltiplichiamo numeratore e denominatore (che è 1!) per la coniugata del numeratore:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+(2/n)}+1} = 1.$$

Importanti considerazioni sulle successioni:

- Se $\{a_n\}$ converge allora è limitata. Non è vero il viceversa $\{(-1)^n\}$ è limitata ma non converge.
- Le successioni monotone limitate convergono. (figura)

- Le successioni definitivamente crescenti o convergono (se sono limitate) o divergono a $+\infty$. Si ha un analogo risultato per le successioni definitivamente decrescenti.
- Se $|x| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Ad esempio $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$
- Se $x \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$[1]

Una successione convergente molto importante è la seguente:

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

Questa successione è crescente e limitata superiormente e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Esercizi sulle successioni:

$$a_n = \frac{5-2n}{3n-7} \qquad a_n = \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2} \qquad a_n = n\sin(\frac{1}{n})$$

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$$

Serie infinite

Si chiama serie infinita una somma di un numero infinito di termini: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ cioè una somma di termini di una successione $\{a_n\}$. Essa può essere riscritta brevemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

[1] $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, ad esempio $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Talvolta è conveniente o necessario iniziare la somma da un indice diverso da 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots .$$

Una somma parziale di una serie è la successione $\{s_n\}$ dei primi n termini della serie:

$$s_1 = a_1, \; s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2, \; s_3 = s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3, \; \cdots$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Convergenza di una serie: si dice che una serie converge alla somma s e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

se $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ dove s_n è la somma parziale n-esima di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Cioè una serie converge se e solo se la successione delle sue somme parziali converge.

Puo essere utile a volte cambiare l'indice di una sommatoria in modo che inizi da un valore differente: ciò viene realizzato tramite una sostituzione, ad esempio per mezzo della sostituzione $n = m - 2$ si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

cioè con il medesimo sviluppo.

Serie geometriche

Una serie della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

il cui termine n-esimo è ar^{n-1} è detta serie geometrica. r è il rapporto comune o ragione della serie geometrica in quanto è il valore del rapporto tra il termine $(n+1)$-esimo e il termine n-esimo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r.$$

La somma parziale s_n della serie geometrica è per $r = 1$, $s_n = na$ e per $r \neq 1$,

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

La serie geometrica è

- convergente a 0 se $a = 0$
- convergente a $\frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$
- divergente a $+\infty$ se $r \geq 1$ e $a > 0$
- divergente a $-\infty$ se $r \geq 1$ e $a < 0$
- divergente se $r \leq -1$.

Ad esempio

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

in questo caso $a = 1$ e $r = \frac{1}{2} < 1$ e quindi la serie converge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{(}2))^{n-1}$ diverge a $+\infty$ in quanto $a = 1$ e $|r| > 1$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ diverge perchè $r = -1$.

Applicazione delle serie geometriche:

Se il denaro frutta un interesse effetivo annuale costante dell'8% che somma si dovrebbe versare per avere una rendita annuale di (a) 1000 euro in 10 anni, (b) 1000 euro per sempre.

(a) Se avessimo considerato solo 1 anno si avrebbe avuto che la somma S da versare sarebbe stata tale che $1000 = S_1 \cdot 1.08$ in quanto la somma S_1 a cui si aggiunge l'8% dovrebbe dare 1000 euro. Se avessimo considerato 2 anni la somma S sarebbe stata data dalla seguente relazione: $1000 = (S_2 \cdot 1.08 - 1000)1.08$: dopo il primo anno alla somma S_2 aumentata dell'8% si tolgono 1000 euro e dopo il secondo anno dopo un ulteriore aumento dell'8% si deve ottenere ancora 1000 euro. Per tre anni si avrebbe avuto $1000 = ((S_3 \cdot 1.08 - 1000)1.08 - 1000)1.08)$ sempre con lo stesso ragionamento. Ricavando S_3 dalla suddetta relazione si ha:

$$\frac{1000}{1.08} = (S_3 \cdot 1.08 - 1000)1.08 - 1000 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1000}{1.08} + 1000 = (S_3 \cdot 1.08 - 1000)1.08 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{1.08}(\frac{1000}{1.08} + 1000) = S_3 \cdot 1.08 - 1000 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{1.08}(\frac{1}{1.08}(\frac{1000}{1.08} + 1000) + 1000) = S_3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1000}{1.08}(\frac{1}{1.08}(\frac{1}{1.08} + 1) + 1) = S_3 \quad \Leftrightarrow$$
$$S_3 = \frac{1000}{1.08}\left(1 + \frac{1}{1.08} + \left(\frac{1}{1.08}\right)^2\right)$$

cosi iterando il procedimento per n in generale (e quindi anche $n = 10$),

$$S_n = \frac{1000}{1.08}\left(1 + \frac{1}{1.08} + \left(\frac{1}{1.08}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1.08}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1000}{1.08} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1.08} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{1000}{1.08} \frac{1 - \left(\frac{1}{1.08}\right)^{n}}{1 - \frac{1}{1.08}}$$

euro. Per $n = 10$ $S = 6710.08$.

Per rispondere a (b) occorre considerare la convergenza della serie $\frac{1000}{1.08} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1.08}\right)^{n-1}$ o equivalentemente il

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1000}{0.08} = 12500$$

euro.

Alcuni teoremi sulle serie:

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. NON è vero il viceversa: un controesempio importante è la cosiddetta serie armonica:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{anche se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

  Questo teorema può essere utile per determinare se una serie diverge: se il suo termine n-esimo non tende a 0 si può dire subito che la serie diverge come ad esempio

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge per ogni $N \geq 1$

- Se $\{a_n\}$ è definitivamente positiva allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deve convergere o divergere positivamente.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergono rispettivamente ad A e B allora:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge a cA dove c è una costante qualsiasi

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ converge a $A \pm B$

(c) Se $a_n \leq b_n$ $\forall n$ allora $A \leq B$

Serie di potenze:

Una serie della forma

$$\sum_{n=0}(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

e' chiamata serie di potenze di $x-c$ o serie di potenze intorno al punto $x = c$. I termini a_n sono i coefficienti della serie di potenze. Poiche' i termini di una serie di potenze sono funzioni di una variabile x, la serie puo' convergere o non convergere per ogni valore di x determinato. Per i valori di x per cui la serie converge, la somma definisce una funzione di x. Ad esempio se $-1 < x < 1$ allora

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

La serie geometrica a sinistra e' una rappresentazione della funzione a destra mediante una serie di potenze di x.

Serie telescopiche:

Le serie telescopiche sono così chiamate perchè le somme parziali si ripiegano in una forma semplice quando i termini sono sviluppati in frazioni parziali, ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$$

ma poichè

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

si ottiene come somma parziale della serie,

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Esercizi sulle serie: stabilire se la serie converge o diverge e determinarne la somma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 3(-\frac{1}{4})^{n-1} \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2n}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$