Esercizi preparatori al secondo parziale

1. Sia $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ Allora la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ calcolata in $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ vale

   (a) $\sqrt{3}$
   (b) $2\sqrt{2}$
   (c) $3\sqrt{3}$
   (d) $\sqrt{2}$

2. Sia: $I = \displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}$ allora

   (a) $I = \sqrt{2}$
   (b) $I = \sqrt{3}$
   (c) $I = \sqrt{5}$
   (d) $I = \sqrt{7}$

3. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{t^4+1}\,dt$ allora $f'(0) =$

   (a) $I = 4\sqrt{2}$
   (b) $I = 0$
   (c) $I = \sqrt{2}$
   (d) $I = 2\sqrt{2}$

4. Dato il sistema lineare $\begin{cases} 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 10 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 - x_4 = 11 \\ x_1 - x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = 0 \end{cases}$ allora possiamo dire che il sistema ammette

   (a) infinite soluzioni della forma $x_1 = 21 + 19\alpha, x_2 = 9 + 10\alpha, x_3 = -4 - 5\alpha, x_4 = 3\alpha$
   (b) la sola soluzione $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -3$
   (c) infinite soluzioni della forma $x_1 = 19\alpha - 18, x_2 = 10\alpha - 9, x_3 = 7 - 5\alpha, x_4 = 3\alpha$
   (d) infinite soluzioni della forma $x_1 = 22 + 19\alpha, x_2 = 9 + 10\alpha, x_3 = -4 - 5\alpha, x_4 = 3\alpha$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1-x) + x\ln(1+x)}{x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1+x^2}} =$

   (a) ∞
   (b) 0
   (c) 1
   (d) non esiste

6. L'equazione $x^5 - 5x - 5 = 0$

   (a) ha 5 radici reali
   (b) ha 3 radici reali
   (c) ha una radice reale positiva
   (d) ha una radice reale negativa

7. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ ha un autovalore uguale a 2 per

   (a) $a = 2$
   (b) $a = 3$
   (c) nessun valore di a
   (d) $a = 0$

8. Se $f(x) = \sqrt{9+x^2}$, $x \in [0,4]$ allora la tesi del Teorema di Lagrange è verificata per

   (a) $x = \sqrt{3}$
   (b) $x = 3$
   (c) $x = \sqrt{2}$
   (d) $x = 2$

9. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ x \in [1, \infty[$.

   (a) Si provi che esiste $x_0 \in [1, \infty[$ tale che $f(x)$ è strettamente crescente per $x \in]1, x_0[$
   (b) Si provi che $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x \in [1, \infty[$
   (c) Si calcoli il valore dell'estremo $M = f(x_0)$
   (d) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x = 3/2$
   (e) Si calcoli $\int_{x_0}^{3} f(x)dx$
   (f) Si provi che $f(x)$ è invertibile per $x \in]1, x_0[$
   (g) Detta $f^{-1}(y)$ l'inversa di $f(x)$ ristretta a $]1, x_0[$ si calcoli: $\int_{f(1)}^{f(x_0)} f^{-1}(y)dy$
   (h) Si provi, senza tentare di calcolarlo, che $f(x)$ ha un unico punto di flesso

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ per cui esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f^{(2)}(x) \ge a > 0$. Si dimostri che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$