Matematica generale CTF

Concetti di base e insiemi numerici

Dott. Alessandro Gambini

5 agosto 2016

Insiemi, relazioni e funzioni

Un insieme viene generalmente indicato con una lettera maiuscola: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ é un insieme con un numero finito di elementi mentre l'insieme dei numeri dispari $D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ é un insieme con un numero infinito di elementi.

Insiemi, relazioni e funzioni

Un insieme viene generalmente indicato con una lettera maiuscola: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ é un insieme con un numero finito di elementi mentre l'insieme dei numeri dispari $D = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ é un insieme con un numero infinito di elementi.
La cardinalitá di un insieme A é il numero degli elementi dell'insieme e si indica con $\mathrm{card}(A)$ o $\#A$. Se il numero di elementi é infinito diciamo semplicemente che la cardinalitá é infinita.

Simbologia

- $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.

Simbologia

- $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- $B \subseteq A$ significa che B é un sottoinsieme di A

Simbologia

- $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- $B \subseteq A$ significa che B é un sottoinsieme di A
- Unione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cup B = \{m \in M : m \in A \vee m \in B\}$.

Simbologia

- $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- $B \subseteq A$ significa che B é un sottoinsieme di A
- Unione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cup B = \{m \in M : m \in A \vee m \in B\}$.
- Intersezione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cap B = \{m \in M : m \in A \wedge m \in B\}$.

Simbologia

- $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- $B \subseteq A$ significa che B é un sottoinsieme di A
- Unione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cup B = \{m \in M : m \in A \vee m \in B\}$.
- Intersezione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cap B = \{m \in M : m \in A \wedge m \in B\}$.
- L'insieme complementare : se $A \subseteq M$ si dice che A^C é il complementare di A su M se $A^C = \{m \in M : m \notin A\}$. Di conseguenza $A \cup A^C = M$ e $A \cap A^C = \varnothing$ (insieme vuoto)

Simbologia

- $a \in A$ significa che l'elemento a appartiene all'insieme A.
- $B \subseteq A$ significa che B é un sottoinsieme di A
- Unione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cup B = \{m \in M : m \in A \vee m \in B\}$.
- Intersezione di due insiemi: se $A, B \subseteq M$ allora $A \cap B = \{m \in M : m \in A \wedge m \in B\}$.
- L'insieme complementare : se $A \subseteq M$ si dice che A^C é il complementare di A su M se $A^C = \{m \in M : m \notin A\}$. Di conseguenza $A \cup A^C = M$ e $A \cap A^C = \varnothing$ (insieme vuoto)
- Il prodotto cartesiano tra due insiemi si indica $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$. Il numero di elementi di $A \times B$ é il prodotto del numero degli elementi dei due insiemi.

Relazioni

Una relazione tra gli insiemi A e B si indica con $A\mathfrak{R}B$ ed é un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Relazioni

Relazione di equivalenza

Supponiamo che $\sim$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \sim A$; una relazione di equivalenza deve soddisfare le seguenti proprietá:

Relazioni

Relazione di equivalenza

Supponiamo che $\sim$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \sim A$; una relazione di equivalenza deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \sim x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)

Relazioni

Relazione di equivalenza

Supponiamo che $\sim$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \sim A$; una relazione di equivalenza deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \sim x \quad \forall\, x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x \quad \forall\, x, y \in A$ (proprietá simmetrica)

Relazioni

Relazione di equivalenza

Supponiamo che $\sim$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \sim A$; una relazione di equivalenza deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \sim x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x \quad \forall x, y \in A$ (proprietá simmetrica)
3. se $x \sim y$ e $y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z \quad \forall x, y, z \in A$ (proprietá transitiva).

Relazioni

Relazione di equivalenza

Supponiamo che $\sim$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \sim A$; una relazione di equivalenza deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \sim x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x \quad \forall x, y \in A$ (proprietá simmetrica)
3. se $x \sim y$ e $y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z \quad \forall x, y, z \in A$ (proprietá transitiva).
   Il simbolo $=$ rappresenta una relazione di equivalenza.

Relazioni

Relazione d'ordine

Supponiamo che $\leq$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \leq A$; una relazione d'ordine deve soddisfare le seguenti proprietá:

Relazioni

Relazione d'ordine

Supponiamo che $\leq$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \leq A$; una relazione d'ordine deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \leq x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)

Relazioni

Relazione d'ordine

Supponiamo che $\leq$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \leq A$; una relazione d'ordine deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \leq x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \leq y$ e $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in A$ (proprietá antisimmetrica)

Relazioni

Relazione d'ordine

Supponiamo che $\leq$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \leq A$; una relazione d'ordine deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \leq x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \leq y$ e $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in A$ (proprietá antisimmetrica)
3. se $x \leq y$ e $y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z \quad \forall x, y, z \in A$ (proprietá transitiva).

Relazioni

Relazione d'ordine

Supponiamo che $\leq$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \leq A$; una relazione d'ordine deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \leq x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \leq y$ e $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in A$ (proprietá antisimmetrica)
3. se $x \leq y$ e $y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z \quad \forall x, y, z \in A$ (proprietá transitiva).

Il simbolo $\leq$ rappresenta una relazione d'ordine.

Relazioni

Relazione d'ordine

Supponiamo che $\leq$ sia una relazione tra l'insieme A e se stesso: $A \leq A$; una relazione d'ordine deve soddisfare le seguenti proprietá:

1. $x \leq x \quad \forall x \in A$ (proprietá riflessiva)
2. se $x \leq y$ e $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in A$ (proprietá antisimmetrica)
3. se $x \leq y$ e $y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z \quad \forall x, y, z \in A$ (proprietá transitiva).

Il simbolo $\leq$ rappresenta una relazione d'ordine.
Una relazione d'ordine si dice **totale** se ogni elemento dell'insieme A é *confrontabile* con tutti gli altri elementi.

Funzioni

Una funzione é una relazione tra un insieme A ed un insieme B che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B cioé $\forall a \in A \; \exists ! \, b \in B \mid f(a) = b$.

Funzioni

Una funzione é una relazione tra un insieme A ed un insieme B che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B cioé $\forall a \in A \; \exists ! \, b \in B \mid f(a) = b$. Generalmente si indica una funzione nel modo seguente:

$$f : A \rightarrow B$$

dove A rappresenta il **dominio** della funzione e B il **codominio**.

Funzioni

Una funzione é una relazione tra un insieme A ed un insieme B che associa ad ogni elemento di A un solo elemento di B cioé $\forall a \in A \; \exists! \, b \in B \mid f(a) = b$.
Generalmente si indica una funzione nel modo seguente:

$$f : A \to B$$

dove A rappresenta il **dominio** della funzione e B il **codominio**.
L'insieme $\mathfrak{G} = \{(a, b) : b = f(a)\}$ é il **grafico** della funzione.

Funzioni

Iniettivitá e suriettivitá

Non tutti gli elementi di A hanno necessariamente un corrispondente in B, peró $f(A) = \{b \in B : b = f(a),\ a \in A\} \subseteq B$. Tale insieme é l'**immagine** della funzione f.

Funzioni

Iniettivitá e suriettivitá

Non tutti gli elementi di A hanno necessariamente un corrispondente in B, peró $f(A) = \{b \in B : b = f(a),\, a \in A\} \subseteq B$. Tale insieme é l'**immagine** della funzione f.

Una funzione f di dice **suriettiva** (su) se l'immagine copre tutto il codominio: $f(A) = B$.

Funzioni

Iniettivitá e suriettivitá

Non tutti gli elementi di A hanno necessariamente un corrispondente in B, peró $f(A) = \{b \in B : b = f(a),\ a \in A\} \subseteq B$. Tale insieme é l'**immagine** della funzione f.

Una funzione f di dice **suriettiva** (su) se l'immagine copre tutto il codominio: $f(A) = B$.

Una funzione f si dice **iniettiva** (1-1) se

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, \quad a_1 = a_2 \;\Leftrightarrow\; f(a_1) = f(a_2).$$

Funzioni

Iniettivitá e suriettivitá

Non tutti gli elementi di A hanno necessariamente un corrispondente in B, peró $f(A) = \{b \in B : b = f(a),\ a \in A\} \subseteq B$. Tale insieme é l'**immagine** della funzione f.
Una funzione f di dice **suriettiva** (su) se l'immagine copre tutto il codominio: $f(A) = B$.
Una funzione f si dice **iniettiva** (1-1) se

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, \quad a_1 = a_2 \;\Leftrightarrow\; f(a_1) = f(a_2).$$

Una funzione iniettiva e suriettiva si dice **biunivoca** .

Funzioni

Iniettivitá e suriettivitá

Non tutti gli elementi di A hanno necessariamente un corrispondente in B, peró $f(A) = \{b \in B : b = f(a),\ a \in A\} \subseteq B$. Tale insieme é l'**immagine** della funzione f.
Una funzione f di dice **suriettiva** (su) se l'immagine copre tutto il codominio: $f(A) = B$.
Una funzione f si dice **iniettiva** (1-1) se

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, \quad a_1 = a_2 \;\Leftrightarrow\; f(a_1) = f(a_2).$$

Una funzione iniettiva e suriettiva si dice **biunivoca** .
La **controimmagine** di un insieme $C \subseteq B$ si indica

$$f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

$\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

é l'insieme che si utilizza per *contare*. E' possibile costruire un algoritmo in grado di generare tutti i numeri naturali partendo da 0: anche se non possiamo elencarli tutti perché sono infiniti esiste un modo per *contarne gli elementi*.

$\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

é l'insieme che si utilizza per *contare*. E' possibile costruire un algoritmo in grado di generare tutti i numeri naturali partendo da 0: anche se non possiamo elencarli tutti perché sono infiniti esiste un modo per *contarne gli elementi*.

I numeri primi sono un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con un numero infinito di elementi e costituiscono i mattoni fondamentali dell'aritmetica, infatti ogni numero si puó scomporre come prodotto di primi.

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma, $(\mathbb{Z}, +)$, é un **gruppo algebrico**:

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma, $(\mathbb{Z}, +)$, é un **gruppo algebrico**:

- $\exists$ l'elemento neutro: $0 + n = n + 0 = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma, $(\mathbb{Z}, +)$, é un **gruppo algebrico**:

- $\exists$ l'elemento neutro: $0 + n = n + 0 = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
- $\exists$ l'opposto: $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists\, p : p + n = 0$.

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma, $(\mathbb{Z}, +)$, é un **gruppo algebrico**:

- $\exists$ l'elemento neutro: $0 + n = n + 0 = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
- $\exists$ l'opposto: $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists\, p : p + n = 0$.
- $\forall n, p, q \in \mathbb{Z}$ vale la proprietá associativa: $(n + p) + q = n + (p + q)$

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma, $(\mathbb{Z}, +)$, é un **gruppo algebrico**:

- $\exists$ l'elemento neutro: $0 + n = n + 0 = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
- $\exists$ l'opposto: $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists\, p : p + n = 0$.
- $\forall n, p, q \in \mathbb{Z}$ vale la proprietá associativa: $(n + p) + q = n + (p + q)$

Se si aggiunge la **proprietá commutativa**, cioé che $\forall n, p \in \mathbb{Z},\ \ n + p = p + n$ si ha che $(\mathbb{Z}, +)$ é un **gruppo commutativo** o abeliano.

$\mathbb{Z}$

Infiniti numerabili

Se costruiamo una applicazione che associa ad ogni numero naturale il suo doppio:

$$\begin{array}{cccc} 0 \to 0 & 1 \to 2 & 2 \to 4 & 3 \to 6 \\ 4 \to 8 & 5 \to 10 & \cdots & n \to 2n \end{array}$$

otteniamo una corrispondenza biunivoca tra i naturali e i numeri pari (nessun numero rimane senza corrispondenza): ció significa che siamo di fronte a due infiniti dello stesso ordine.

$\mathbb{Z}$

Infiniti numerabili

Se costruiamo una applicazione che associa ad ogni numero naturale il suo doppio:

$$\begin{array}{cccc} 0 \to 0 & 1 \to 2 & 2 \to 4 & 3 \to 6 \\ 4 \to 8 & 5 \to 10 & \cdots & n \to 2n \end{array}$$

otteniamo una corrispondenza biunivoca tra i naturali e i numeri pari (nessun numero rimane senza corrispondenza): ció significa che siamo di fronte a due infiniti dello stesso ordine.
Si dice che $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ o l'insieme dei numeri pari sono **numerabili**, cioé in modo informale possiamo dire che esiste un modo per *contare i loro elementi*, e tutti gli insiemi numerabili hanno lo stesso numero di elementi.

$\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ é un gruppo abeliano:

1. $\exists$ l'elemento neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ é un gruppo abeliano:

1. $\exists$ l'elemento neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$.
2. $\exists$ l'inverso della moltiplicazione (il reciproco): $\forall a \in \mathbb{Q}^* \; \exists \, b : a \cdot b = 1$.

$\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ é un gruppo abeliano:

1. $\exists$ l'elemento neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$.
2. $\exists$ l'inverso della moltiplicazione (il reciproco): $\forall a \in \mathbb{Q}^* \; \exists\, b : a \cdot b = 1$.
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ vale la proprietá associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ é un gruppo abeliano:

1. $\exists$ l'elemento neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Q}$.
2. $\exists$ l'inverso della moltiplicazione (il reciproco): $\forall a \in \mathbb{Q}^* \ \exists\, b : a \cdot b = 1$.
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ vale la proprietá associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. vale la proprietá commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{Q}, \ \ a \cdot b = b \cdot a$

$\mathbb{Q}$

Frazioni e rappresentazione decimale

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** o **irriducibile** se numeratore e denominatore sono primi tra loro. Se non lo sono la frazione puó essere ridotta dividendo entrambi per il loro MCD.

$\mathbb{Q}$

Frazioni e rappresentazione decimale

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** o **irriducibile** se numeratore e denominatore sono primi tra loro. Se non lo sono la frazione puó essere ridotta dividendo entrambi per il loro MCD.
Ogni numero decimale finito o periodico si puó scrivere come frazione, ad esempio, $\frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$ ma é vero anche il viceversa, tutte le frazioni danno luogo a numeri decimali finiti o periodici.

$\mathbb{Q}$

Frazioni e rappresentazione decimale

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** o **irriducibile** se numeratore e denominatore sono primi tra loro. Se non lo sono la frazione puó essere ridotta dividendo entrambi per il loro MCD.
Ogni numero decimale finito o periodico si puó scrivere come frazione, ad esempio, $\frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$ ma é vero anche il viceversa, tutte le frazioni danno luogo a numeri decimali finiti o periodici.

$$\frac{51}{94} = \quad 0.5 \quad 4255319148936170212765957446808510638297872340 \quad 42553$$
$$1914893617021276595744680851063829787234042553 19 \ldots$$

$\mathbb{Q}$
Definizione di campo

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni di somma e moltiplicazione é una struttura algebrica chiamata campo, cioé:

$\mathbb{Q}$

Definizione di campo

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni di somma e moltiplicazione é una struttura algebrica chiamata campo, cioé:

1. $(\mathbb{Q}, +)$ é un gruppo commutativo

$\mathbb{Q}$
Definizione di campo

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni di somma e moltiplicazione é una struttura algebrica chiamata campo, cioé:

1. $(\mathbb{Q}, +)$ é un gruppo commutativo
2. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é un gruppo commutativo

$\mathbb{Q}$

Definizione di campo

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni di somma e moltiplicazione é una struttura algebrica chiamata campo, cioé:

1. $(\mathbb{Q}, +)$ é un gruppo commutativo
2. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é un gruppo commutativo
3. Vale la proprietá distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}\ a(b+c) = ab + ac$.

$\mathbb{Q}$
Definizione di campo

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni di somma e moltiplicazione é una struttura algebrica chiamata campo, cioé:

1. $(\mathbb{Q}, +)$ é un gruppo commutativo
2. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é un gruppo commutativo
3. Vale la proprietá distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}\ a(b + c) = ab + ac$.

si indica con $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

$\mathbb{Q}$

Densitá di $\mathbb{Q}$

Se consideriamo due interi a e b e contiamo gli elementi interi compresi tra l'uno e l'altro otterremo sempre un insieme finito di elementi per quanto distanti siano i numeri a e b. Se invece consideriamo due numeri razionali a e b, per quanto vicini possano essere, troveremo sempre un'infinitá di razionali compresi tra l'uno e l'altro. Questa proprietá detta a parole é la proprietá di densitá di $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$

Densitá di $\mathbb{Q}$

Se consideriamo due interi a e b e contiamo gli elementi interi compresi tra l'uno e l'altro otterremo sempre un insieme finito di elementi per quanto distanti siano i numeri a e b. Se invece consideriamo due numeri razionali a e b, per quanto vicini possano essere, troveremo sempre un'infinitá di razionali compresi tra l'uno e l'altro. Questa proprietá detta a parole é la proprietá di densitá di $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ é un insieme **denso** perché $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b, \ \exists\, c \in \mathbb{Q} : a < c < b$. Ad esempio $c = \dfrac{a+b}{2}$ é sicuramente razionale ed é compreso tra a e b.

$\mathbb{Q}$

Densitá di $\mathbb{Q}$

Senza addentrarsi in considerazioni topologiche, la cosa importante da non travisare é la seguente: gli elementi di $\mathbb{Z}$ rappresentano **punti isolati**, tra un punto e l'altro **non c'é nulla**, c'é un *salto*. Questo non avviene in $\mathbb{Q}$ ma ció non significa che $\mathbb{Q}$ rappresenti un insieme *continuo* di valori.

$\mathbb{Q}$

Densitá di $\mathbb{Q}$

Se pensiamo all'insieme del denaro contante, esso rappresenta un insieme discreto di valori in quanto esiste una unitá fondamentale che é il centesimo di Euro e che non si puó suddividere. Viceversa se pensiamo alla temperatura di un'aula, per passare da $20°$C a $21°$C occorre riscaldare l'aula e la temperatura aumenterá da $20°$C a $21°$C toccando **tutti i valori intermedi in modo continuo**; il mercurio del termometro non si dilata *a scatti*! Questa é la prima differenza tra il concetto di **discreto** e di **continuo**, il denaro si **conta**, la temperatura si **misura**. L'insieme $\mathbb{Q}$ vive in una via di mezzo tra discreto e continuo perché contiene un numero infinito di *buchi* sulla retta reale; si dice che $\mathbb{Q}$ **non é completo**.

Numeri irrazionali

$\sqrt{2}$ é irrazionale.

Numeri irrazionali

$\sqrt{2}$ é irrazionale.

Dimostazione

Supponiamo **per assurdo** che $\sqrt{2}$ sia razionale: in questo caso possiamo scriverlo come una frazione **irriducibile**: $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$.

Numeri irrazionali

$\sqrt{2}$ é irrazionale.

Dimostazione

Supponiamo **per assurdo** che $\sqrt{2}$ sia razionale: in questo caso possiamo scriverlo come una frazione **irriducibile**: $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$.

Elevando entrambi i membri al quadrato si ottiene

$$2 = \frac{n^2}{p^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = n^2$$

Numeri irrazionali

$\sqrt{2}$ é irrazionale.
Dimostazione
Supponiamo **per assurdo** che $\sqrt{2}$ sia razionale: in questo caso possiamo scriverlo come una frazione **irriducibile**: $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$.
Elevando entrambi i membri al quadrato si ottiene

$$2 = \frac{n^2}{p^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = n^2$$

da cui si deduce che, essendo $n, p \in \mathbb{Z}$, n deve essere pari (é uguale a $2p^2$ che é necessariamente pari), quindi n si puó scrivere come $2q$ con $q \in \mathbb{Z}$:

Numeri irrazionali

$$2p^2 = n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = (2q)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = 4q^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

Numeri irrazionali

$$2p^2 = n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = (2q)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 = 4q^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 2q^2$$

ma dall'ultima uguaglianza si evince che anche p dovrebbe essere pari! Ció é assurdo perché avevamo posto $\frac{n}{p}$ come frazione irriducibile!

$\mathbb{R}$

I numeri non razionali o **irrazionali** sono stati scoperti dai greci quali grandezze *incommensurabili*. Si pensa che furono Pitagora e i pitagorici a fornire una argomentazione della irrazionalitá di $\sqrt{2}$ anche se essi stessi stentavano a riconoscere l'esistenza di tali numeri.

$\mathbb{R}$

I numeri non razionali o **irrazionali** sono stati scoperti dai greci quali grandezze *incommensurabili*. Si pensa che furono Pitagora e i pitagorici a fornire una argomentazione della irrazionalitá di $\sqrt{2}$ anche se essi stessi stentavano a riconoscere l'esistenza di tali numeri.
Il fatto che π sia un numero irrazionale, non é facile da dimostrare. Prima dell'arrivo dei calcolatori elettronici che oggi hanno scoperto milioni di cifre dopo la virgola, era difficile calcolare le cifre decimali di pi greco poiché non hanno un periodo e né regolaritá alcuna.

$\mathbb{R}$

I numeri non razionali o **irrazionali** sono stati scoperti dai greci quali grandezze *incommensurabili*. Si pensa che furono Pitagora e i pitagorici a fornire una argomentazione della irrazionalitá di $\sqrt{2}$ anche se essi stessi stentavano a riconoscere l'esistenza di tali numeri.
Il fatto che π sia un numero irrazionale, non é facile da dimostrare. Prima dell'arrivo dei calcolatori elettronici che oggi hanno scoperto milioni di cifre dopo la virgola, era difficile calcolare le cifre decimali di pi greco poiché non hanno un periodo e né regolaritá alcuna.
L'insieme dei **numeri reali** comprende tutti i razionali e gli irrazionali e si indica con la lettera $\mathbb{R}$. Questa **non** é una definizione rigorosa.

$\mathbb{R}$

Un'altro concetto importante su cui non ci addentreremo ma che non bisogna assolutamente sottovalutare é che i numeri irrazionali rappresentano la **quasi totalitá** dei numeri reali. Puó sembrare assurdo ma una delle differenze fondamentali tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ é che anche $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$ é un insieme numerabile (si puó trovare un algoritmo per contarne gli elementi) mentre $\mathbb{R}$ rappresenta un insieme **non numerabile**, un infinito di ordine superiore, in cui non é possibile trovare alcun criterio per contarne gli elementi.

$\mathbb{R}$

Un'altro concetto importante su cui non ci addentreremo ma che non bisogna assolutamente sottovalutare é che i numeri irrazionali rappresentano la **quasi totalitá** dei numeri reali. Puó sembrare assurdo ma una delle differenze fondamentali tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ é che anche $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}$ é un insieme numerabile (si puó trovare un algoritmo per contarne gli elementi) mentre $\mathbb{R}$ rappresenta un insieme **non numerabile**, un infinito di ordine superiore, in cui non é possibile trovare alcun criterio per contarne gli elementi.
L'insieme $\mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto é un campo totalmente ordinato; sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tutti gli intervalli della retta reale. A differenza di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ é un insieme *senza buchi*, continuo.

Estremanti

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq y \; \forall \, y \in I$. Si dice che x é un **maggiorante** dell'insieme I.

Estremanti

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq y \; \forall \, y \in I$. Si dice che x é un **maggiorante** dell'insieme I.
Allo stesso modo un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **inferiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq y \; \forall \, y \in I$. Si dice che x é un **minorante** dell'insieme A.

Estremanti

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq y \ \forall y \in I$. Si dice che x é un **maggiorante** dell'insieme I.
Allo stesso modo un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **inferiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq y \ \forall y \in I$. Si dice che x é un **minorante** dell'insieme A.
Il piú piccolo dei maggioranti di un sottoinsieme A si chiama **estremo superiore** e si indica con $\sup(I)$, il piú grande dei minoranti si chiama **estremo inferiore** e si indica con $\inf(I)$.

Estremanti

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq y \ \forall y \in I$. Si dice che x é un **maggiorante** dell'insieme I.
Allo stesso modo un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice **inferiormente limitato** se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq y \ \forall y \in I$. Si dice che x é un **minorante** dell'insieme A.
Il piú piccolo dei maggioranti di un sottoinsieme A si chiama **estremo superiore** e si indica con $\sup(I)$, il piú grande dei minoranti si chiama **estremo inferiore** e si indica con $\inf(I)$.
Se l'estremo superiore appartiene all'insieme I allora é il **massimo**; se l'estremo inferiore appartiene all'insieme I allora é il **minimo**. In caso contrario non esistono massimo o minimo.

Estremanti

Assioma di completezza

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$. Lo stesso si puó dire per l'estremo inferiore.

Estremanti

Assioma di completezza

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$. Lo stesso si puó dire per l'estremo inferiore.
Se un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ non é superiormente limitato si dice che $\sup(I) = +\infty$ mentre se non é inferiormente limitato si dice che $\inf(I) = -\infty$.

Estremanti

Esempi

- Se $I = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, allora $\frac{3}{2}$, 2, 10 sono maggioranti di I ma l'estremo superiore é un numero irrazionale: $\sqrt{2}$.

Estremanti

Esempi

- Se $I = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, allora $\frac{3}{2}$, 2, 10 sono maggioranti di I ma l'estremo superiore é un numero irrazionale: $\sqrt{2}$.
- Se $I = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 2\}$, allora l'estremo superiore é 1, il piú piccolo intero minore di $\sqrt{2}$ e in questo caso é anche il massimo. L'estremo inferiore analogamente é -1 che rappresenta anche il minimo.

Estremanti

Esempi

- Se $I = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, allora $\frac{3}{2}$, 2, 10 sono maggioranti di I ma l'estremo superiore é un numero irrazionale: $\sqrt{2}$.
- Se $I = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 2\}$, allora l'estremo superiore é 1, il piú piccolo intero minore di $\sqrt{2}$ e in questo caso é anche il massimo. L'estremo inferiore analogamente é -1 che rappresenta anche il minimo.
- Se $I = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 2\}$, allora l'estremo superiore é $\sqrt[3]{2}$, e in questo caso é anche il massimo perché $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. L'estremo inferiore invece é $-\infty$ quindi non esiste il minimo.

Intervalli della retta reale

Si indicano con le parentesi quadre o tonde:

Intervalli della retta reale

Si indicano con le parentesi quadre o tonde:

- l'intervallo $[a, b]$ indica l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ in cui anche gli estremi appartengono all'intervallo. Si tratta di un intervallo in cui $\sup([a, b]) = \max([a, b]) = b$ e $\inf([a, b]) = \min([a, b]) = a$. L'intervallo si dice topologicamente **chiuso** perchè contiene la sua *frontiera*

Intervalli della retta reale

Si indicano con le parentesi quadre o tonde:

- l'intervallo $[a, b]$ indica l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ in cui anche gli estremi appartengono all'intervallo. Si tratta di un intervallo in cui $\sup([a, b]) = \max([a, b]) = b$ e $\inf([a, b]) = \min([a, b]) = a$. L'intervallo si dice topologicamente **chiuso** perchè contiene la sua *frontiera*
- l'intervallo $]a, b[$ o (a, b) indica l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ in cui gli estremi **non** appartengono all'intervallo. Si tratta di un intervallo in cui $\max(]a, b[)$ e $\min(]a, b[)$ non esistono mentre $\sup(]a, b[) = b$ e $\inf(]a, b[) = a$. L'intervallo si dice topologicamente **aperto**

Intervalli della retta reale

Si indicano con le parentesi quadre o tonde:

- l'intervallo $[a, b]$ indica l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ in cui anche gli estremi appartengono all'intervallo. Si tratta di un intervallo in cui $\sup([a, b]) = \max([a, b]) = b$ e $\inf([a, b]) = \min([a, b]) = a$. L'intervallo si dice topologicamente **chiuso** perchè contiene la sua *frontiera*
- l'intervallo $]a, b[$ o (a, b) indica l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ in cui gli estremi **non** appartengono all'intervallo. Si tratta di un intervallo in cui $\max(]a, b[)$ e $\min(]a, b[)$ non esistono mentre $\sup(]a, b[) = b$ e $\inf(]a, b[) = a$. L'intervallo si dice topologicamente **aperto**
- alcuni intervalli non sono nè aperti nè chiusi: ad esempio $[a, b[$ o $]b, a]$ o l'unione di intervalli di questo tipo in cui alcuni estremi appartengono all'intervallo e altri no.

Intervalli della retta reale

Ogni intervallo aperto e limitato *piccolo a piacere* si puó mettere in corrispondenza biunivoca con la retta reale (illimitata), cioé il segmento e la retta contengono lo stesso ordine di infinito di punti!

Piano cartesiano

Il piano cartesiano bidimensionale é un sistema di riferimento formato, da 2 rette rette reali tra loro perpendicolari che si intersecano in un punto chiamato origine. Il piano cartesiano é caratterizzato dalla cosiddetta metrica euclidea e tutte le funzioni che disegneremo saranno delle curve o un insieme di punti sul piano cartesiano.
Geogebra

Principio di induzione

Se $I \subseteq \mathbb{N}^*$ e valgono:

- $1 \in I$
- $n \in I \;\; \Rightarrow \;\; n + 1 \in I$

allora $I = \mathbb{N}$

Principio di induzione

Se $I \subseteq \mathbb{N}^*$ e valgono:

- $1 \in I$
- $n \in I \;\Rightarrow\; n+1 \in I$

allora $I = \mathbb{N}$
Se $P(n)$ é una proposizione per $n \in \mathbb{N}$ e valgono:

- $P(1)$ é vera
- $P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)$

allora $P(n)$ é vera pero ogni $n \in \mathbb{N}$.

Principio di induzione

Somma di Gauss

Vediamo come il principio di induzione ci permette ad esempio di dimostrare che la somma dei primi n interi consecutivi vale

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

dove anziché scrivere $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ abbiamo usato il simbolo di sommatoria (é necessario imparare a *giocare* con le sommatorie...).

Principio di induzione

Somma di Gauss

Dimostrazione La prima cosa da fare é verificare se l'uguaglianza vale per $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$$

Principio di induzione

Somma di Gauss

Dimostrazione La prima cosa da fare é verificare se l'uguaglianza vale per $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$$

La parte meno intuitiva dell'applicazione del principio di induzione viene ora: supponiamo che l'uguaglianza sia vera (é la tesi che vogliamo dimostrare...ora la utilizziamo come ipotesi) e vediamo che ció ci permette di dimostrare l'uguaglianza per $n + 1$.

Principio di induzione

Somma di Gauss

Sostanzialmente la nostra tesi ora diventa:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Principio di induzione

Somma di Gauss

Sostanzialmente la nostra tesi ora diventa:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Partiamo quindi dal membro a sinistra e spezziamo la somma:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$

Principio di induzione

Somma di Gauss

Lo scopo di questa suddivisione della sommatoria ci permette di evidenziare la sommatoria fino a n di cui, per ipotesi induttiva, conosciamo l'espressione equivalente. Infatti ora utilizziamo l'ipotesi induttiva:

$$\sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \cdots = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Fattoriale

Rimanendo nell'insieme dei numeri naturali definiamo due importanti applicazioni:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Fattoriale

Rimanendo nell'insieme dei numeri naturali definiamo due importanti applicazioni:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$n!$ é il prodotto di tutti i naturali da 1 a n e si puó scrivere anche con il simbolo di **produttoria**: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. Poiché $0!$ non avrebbe senso con tale definizione si conviene che $0! = 1$.

Fattoriale

Rimanendo nell'insieme dei numeri naturali definiamo due importanti applicazioni:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$n!$ é il prodotto di tutti i naturali da 1 a n e si puó scrivere anche con il simbolo di **produttoria**: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. Poiché $0!$ non avrebbe senso con tale definizione si conviene che $0! = 1$.
Il fattoriale si puó definire anche in modo *ricorsivo*:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$