Matematica - CTF

dott. Alessandro Gambini

Primo parziale 19 novembre 2015

Cognome

Nome

Matricola

1. (**p.ti 5**) Utilizzando opportunamente i criteri di convergenza stabilire il carattere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^t}$$

converge se $t > 1$, diverge se $t \leq 1$, criterio del confronto

2. (**p.ti 6**) Utilizzando il criterio del rapporto stabilire il carattere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (n+1)!}{n^n}$$

converge se $a < e$, diverge se $a > e$

e scrivere per esteso $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{a^n (n+1)!}{n^n}$ $=2a + \frac{3a^2}{2} + \frac{8a^3}{9} + \frac{15a^4}{32}$

3. (**p.ti 7**) In un piccolo paese di 10.000 abitanti, il tasso di mortalità annuo è x.

a) Supponendo che non nascano bambini dopo quanti anni ci saranno meno di 3.000 abitanti? arrotondamento per eccesso all'intero successivo di $\dfrac{\ln \frac{3}{10}}{\ln(1-x)}$

b) Fortunatamente ogni anno nascono b bambini. Come si potrebbe descrivere in questo caso l'evoluzione della popolazione? In questo caso la popolazione si estingue, aumenta a dismisura, si stabilizza? Perché? $a_{n+1} = a_n(1-x) + b$, la popolazione si stabilizza perché dopo diverse iterazioni la diminuzione in percentuale corrisponderà più o meno al numero di bambini nati.

4. (**p.ti 5**) Considera la funzione $f(x) = \dfrac{x^k \sin(x)}{1-\cos(x)}$. Per quale valore di k, $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$? Motivare la risposta $k = 3$, $\sin x = x + o(x)$ e $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

5. (**p.ti 5**) Disegnare una funzione f che abbia tutte le seguenti caratteristiche:

- f è pari
- $f(2) = 0$
- $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$
- f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$

6. (**p.ti 5**) Stabilire per quali valori del parametro reale k la seguente funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} k^2x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{kx} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

E' continua per ogni k reale