Matematica - CTF

dott. Alessandro Gambini

Primo parziale 25 novembre 2016

Cognome

Nome

Matricola

1. (**p.ti 5**) Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n\log n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}$$

2. (**p.ti 5**) Date le seguenti funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \frac{1}{2}$ determinare
   - $f(g(x)) = e^x$
   - $2f(g(0) + h(3)) = 3$
   - $h(g(x)) = \frac{1}{2}$
   - $g(f(x + h(x))) = e^{|x+\frac{1}{2}|}$

3. (**p.ti 6**) Stabilire per quali valori del parametro x reale la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ converge e calcolarne la somma per $x = 3$. converge se $x < -1$ e $x > 1$; la somma é $\frac{3}{2}$.

4. (**p.ti 6**) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ è divergente.

5. (**p.ti 7**) Una pianta infestante é presente in un lago con 1.000 esemplari ed ha un tasso di crescita del 50% giornaliero.

   a) Supponendo che non vengano presi provvedimenti dopo quanto tempo la pianta supererá i 20.000 esemplari? Dopo 8 giorni.

   b) Mediante una disinfestazione giornaliera vengono rimossi ogni giorno 200 esemplari. Qual é l'espressione ricorsiva dell'andamento degli esemplari della pianta al passare del numero dei giorni? $a_{n+1} = 1,5\, a_n - 200.$ La disinfestazione riuscirá a impedire alla pianta di riempire il lago? Motivare la risposta. No perché la successione definita ricorsivamente non é limitata superiormente. D'altra parte partendo da 1000 la la percentuale di crescita supera i 200 esemplari rimossi che man mano diventano un valore trascurabile.

6. (**p.ti 7**) Sfruttando il teorema di Cesaro calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n} = \infty$$