

Cognome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1. (p.ti 5) Sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 0 \\ e^{x^2} + x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di a e b reali la funzione è continua e derivabile. $a = b = 1$

2. (p.ti 5) Sia

$$f(x) = \int_1^x t \log^3(1 + t^2) dt.$$

Stabilire per quali valori di x la funzione è crescente. $\forall x > 0$

3. (p.ti 5) Stabilire il numero di radici reali della funzione

$$f(x) = x^3 + x^2 + 7x + k$$

al variare di k e individuarne il segno. Determinare inoltre il valore di k per cui una radice coincide con il punto di flesso della funzione. Una sola radice per ogni k . Positiva per $k < 0$, negativa per $k > 0$. Coincide con il punto di flesso per $k = \frac{61}{27}$.

4. (p.ti 6) Determinare se il seguente integrale improprio converge o diverge motivando la risposta:

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + \sqrt{t})}{t} dt \text{ converge}$$

5. (p.ti 6) Dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + e^x y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

verificare che

- la soluzione è unica la derivata rispetto a y è continua in y
- l'unica soluzione è la funzione $y(x) = \frac{2e^x}{3 - e^{2x}}$

e determinare il dominio massimale della soluzione. $]-\infty, \frac{\log 3}{2}[$

6. (p.ti 6) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - \sin^2 x}{e^{x^4} - 1} = \frac{1}{4}$$