Matematica generale CTF

Serie numeriche

Dott. Alessandro Gambini

10 novembre 2016

Definizione di serie numerica

La somma di tutti gli infiniti elementi di una successione è una **serie numerica** e si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Definizione di serie numerica

La somma di tutti gli infiniti elementi di una successione è una **serie numerica** e si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Le serie sono somme di infiniti addendi e il **termine generale** della serie è la successione a_n.

Definizione di serie numerica

La somma di tutti gli infiniti elementi di una successione è una **serie numerica** e si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Le serie sono somme di infiniti addendi e il **termine generale** della serie è la successione a_n.

Se sommiamo infiniti termini tutti uguali la somma sarà infinita (a meno che questi termini non siano tutti nulli!), ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

Definizione di serie numerica

La somma di tutti gli infiniti elementi di una successione è una **serie numerica** e si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Le serie sono somme di infiniti addendi e il **termine generale** della serie è la successione a_n.

Se sommiamo infiniti termini tutti uguali la somma sarà infinita (a meno che questi termini non siano tutti nulli!), ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = +\infty$$

ma se il termine generale della serie diventa sempre più piccolo la somma è sempre infinita?

Convergenza e divergenza

Così come per le successioni, anche per le serie definiamo una serie **convergente** quando la somma di tutti i termini è finita e **divergente** se la somma di tutti i suoi termini è $\pm\infty$. Se la serie oscilla e non è nè convergente nè divergente diciamo che la serie è **irregolare**.

Serie geometrica

Se prendiamo una progressione geometrica $a_n = q^n$ (in cui abbiamo posto per semplicità il termine iniziale $a = 1$), e sommiamo gli infiniti termini della successione otteniamo (in alcune situazioni) una somma finita: questa serie si chiama **serie geometrica**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Serie geometrica

Somma della serie geometrica

Vediamo in quali casi la serie geometrica è convergente e in quali è divergente utilizzando una formula già dimostrata per le progressioni geometriche: la somma dei primi n termini di una progressione geometrica. Vediamo come si comporta tale somma quando n tende a $+\infty$:

Serie geometrica

Somma della serie geometrica

Vediamo in quali casi la serie geometrica è convergente e in quali è divergente utilizzando una formula già dimostrata per le progressioni geometriche: la somma dei primi n termini di una progressione geometrica. Vediamo come si comporta tale somma quando n tende a $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Serie geometrica

Somma della serie geometrica

Vediamo in quali casi la serie geometrica è convergente e in quali è divergente utilizzando una formula già dimostrata per le progressioni geometriche: la somma dei primi n termini di una progressione geometrica. Vediamo come si comporta tale somma quando n tende a $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Abbiamo ridotto lo studio della somma della serie geometrica allo studio di un limite di una successione numerica. Tale formula esclude il caso $q = 1$ ma per tutti gli altri valori di q il limite ottenuto converge ad un valore finito quando $|q| < 1$, diverge per $q > 1$ e oscilla per $q \leq -1$.

Somma della serie geometrica

Riepilogando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{se } |q| < 1; \\ +\infty, & \text{se } q \geq 1; \\ \text{è irregolare}, & \text{se } q \leq -1; \end{cases}$$

Somma della serie geometrica

Riepilogando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{se } |q| < 1; \\ +\infty, & \text{se } q \geq 1; \\ \text{è irregolare}, & \text{se } q \leq -1; \end{cases}$$

in particolare se $q = -1$ oscilla in modo limitato tra 0 e 1 mentre se $q < -1$ oscilla in modo illimitato.

Serie geometrica

Esempi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}$$

Serie geometrica

Esempi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = +\infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \text{ è irregolare.}$$

Serie geometrica

Esempi

Poiché per le serie geometriche convergenti è possibile stabilire la somma della serie, un ruolo fondamentale viene giocato dal *punto di partenza* della serie che abbiamo sempre posto $n = 0$ (se ci si limita a stabilire il carattere della serie e non la somma quale sia il primo termine della serie diventerebbe irrilevante): cosa succederebbe se la serie partisse da $n = 1$ o $n = k$?

Serie geometrica

Esempi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 \cdots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q^1 + q^2 + q^3 \cdots$$

Serie geometrica

Esempi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 \cdots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q^1 + q^2 + q^3 \cdots$$

pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - q^0 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$$

Serie geometrica
Esempi

Allo stesso modo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - (q^0 + q^1) = \frac{1}{1-q} - (1+q) = \frac{q^2}{1-q}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - (q^0 + q^1 + q^2) = \frac{1}{1-q} - (1+q+q^2) = \frac{q^3}{1-q}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{k-1})$$

Serie geometrica

Esempi

sfruttando ancora una volta la somma parziale di una successione geometrica si ottiene la formula:

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - (q^0 + \cdots + q^{k-1}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \left(\sum_{n=0}^{k-1} q^n\right) = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}$$

Serie armonica

Serie convergenti

Fino a questo momento abbiamo trattato le serie geometriche in cui oltre a trovare il carattere della serie abbiamo potuto stabilirne la somma. In tutti i casi di serie convergente il termine generale della serie era una successione infinitesima: il fatto che la successione sia infinitesima è legato in qualche modo alla convergenza della serie?

Serie armonica

Serie convergenti

Fino a questo momento abbiamo trattato le serie geometriche in cui oltre a trovare il carattere della serie abbiamo potuto stabilirne la somma. In tutti i casi di serie convergente il termine generale della serie era una successione infinitesima: il fatto che la successione sia infinitesima è legato in qualche modo alla convergenza della serie?

Teorema

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente $\Rightarrow$ la successione a_n è infinitesima.

Serie armonica

Serie convergenti

Dimostrazione

Se la serie è convergente allora poniamo che $s \in \mathbb{R}$ sia la somma della serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Per definizione sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Serie armonica

Serie convergenti

Dimostrazione

Se la serie è convergente allora poniamo che $s \in \mathbb{R}$ sia la somma della serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Per definizione sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

ma allora anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Serie armonica

Serie convergenti

Poiché $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s - s = 0$$

Serie armonica

Serie convergenti

Poiché $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s - s = 0$$

NON è vero il viceversa!

Serie armonica

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$ ne è un controesempio.

Serie armonica

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$ ne è un controesempio.

Dimostrazione

Ricordiamo che la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge ad e in modo monotòno crescente, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

Serie armonica

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$ ne è un controesempio.

Dimostrazione

Ricordiamo che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge ad e in modo monotòno crescente, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Si tratta di termini positivi quindi possiamo applicare il logaritmo naturale ad ambo i membri:

Serie armonica

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) < \ln(e) \quad \Leftrightarrow \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n(\ln(n+1) - \ln(n)) < 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

Adesso sommiamo gli infiniti termini delle due successioni ad ambo i membri della disuguaglianza e finalmente otteniamo a destra la serie armonica (se una successione a termini positivi è sempre maggiorata da un'altra allora anche la somma dei suoi infiniti termini sarà maggiorata dalla somma degli infiniti termini dell'altra):

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln(n)) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln(n)) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

ma se osserviamo la prima serie ci accorgiamo che i vari termini degli addendi si elidono a due a due:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln(n)) = \lim_{n\to\infty}((\ln(2)-0)+(\ln(3)-\ln(2))+ \\ +(\ln(4)-\ln(3))+\cdots+(\ln(n+1)-\ln(n)))$$

Serie armonica

Rimane solo il termine $\ln(n+1)$ per $n \to \infty$ quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = +\infty$$

Serie armonica

Rimane solo il termine $\ln(n+1)$ per $n \to \infty$ quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

Tornando alla disequazione abbiamo ottenuto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > +\infty$$

Serie armonica

Rimane solo il termine $\ln(n+1)$ per $n \to \infty$ quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

Tornando alla disequazione abbiamo ottenuto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > +\infty$$

quindi per il criterio del confronto la serie armonica è divergente.

Serie armonica generalizzata

Si parla di **serie armonica genealizzata** quando si tratta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

in questo caso (senza dimostrarlo) la serie è convergente per $\alpha > 1$.

Serie armonica generalizzata

Si parla di **serie armonica genealizzata** quando si tratta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

in questo caso (senza dimostrarlo) la serie è convergente per $\alpha > 1$.
Il caso $\alpha = 1$ è stato appena trattato e poiché α deve essere strettamente maggiore di 1 per la convergenza, $\alpha = 1$ diventa un caso limite: per tutti gli α anche leggermente più grandi di 1 ($\alpha \in \mathbb{R}$) la serie armonica converge.

Serie armonica generalizzata

Si parla di **serie armonica genealizzata** quando si tratta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

in questo caso (senza dimostrarlo) la serie è convergente per $\alpha > 1$.
Il caso $\alpha = 1$ è stato appena trattato e poiché α deve essere strettamente maggiore di 1 per la convergenza, $\alpha = 1$ diventa un caso limite: per tutti gli α anche leggermente più grandi di 1 ($\alpha \in \mathbb{R}$) la serie armonica converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

Criterio del confronto

Siano a_n e b_n due successioni a termini positivi tale che $0 < a_n < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Valgono i fatti seguenti:

1. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.
2. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è divergente.

Criterio del confronto

Esempi

Ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+1}{n^2}$ è convergente perché vale la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

Dato che la serie armonica con $\alpha = 2$ è convergente, allora lo è anche la serie di partenza.

Criterio del confronto asintotico

Siano a_n e b_n due successioni a termini positivi tali che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$.

Criterio del confronto asintotico

Siano a_n e b_n due successioni a termini positivi tali che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente.
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è divergente.

Criterio del confronto asintotico

Siano a_n e b_n due successioni a termini positivi tali che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente.
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente se e solo se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è divergente.

In questo caso abbiamo una doppia implicazione.

Criterio del confronto asintotico

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Criterio del confronto asintotico

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Il termine generale di questa serie si può confrontare con quello della serie armonica $\frac{1}{n^{\alpha}}$, in particolare si osserva che il limite del rapporto tra i due termini generali delle due serie è un numero reale non nullo solo se $\alpha = 2$:

Criterio del confronto asintotico

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Il termine generale di questa serie si può confrontare con quello della serie armonica $\frac{1}{n^\alpha}$, in particolare si osserva che il limite del rapporto tra i due termini generali delle due serie è un numero reale non nullo solo se $\alpha = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1$$

Criterio del confronto asintotico

Serie di Mengoli

Questo è sufficiente a dire che la serie di Mengoli è convergente in quanto sappiamo già che la serie armonica con $\alpha = 2$ è convergente. Se il limite fosse stato 0 o $+\infty$ non avremmo potuto dire nulla riguardo alla convergenza delle due serie; infatti prendendo la serie di Mengoli che ora sappiamo essere convergente e la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che sappiamo essere divergente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(n+1)} = 0$$

ma le due serie hanno carattere diverso.

Serie telescopiche

Serie di Mengoli

Oltre al fatto che la serie di Mengoli è convergente, essa è una delle rare serie non geometriche di cui è possibile trovare la somma; si tratta di una cosiddetta **serie telescopica** perché si può scomporre con semplici passaggi algebrici in questa forma:

Serie telescopiche

Serie di Mengoli

Oltre al fatto che la serie di Mengoli è convergente, essa è una delle rare serie non geometriche di cui è possibile trovare la somma; si tratta di una cosiddetta **serie telescopica** perché si può scomporre con semplici passaggi algebrici in questa forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

Serie telescopiche

Serie di Mengoli

tutti i termini si elidono a due a due e la serie si riduce a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1$$

Criterio del rapporto

Se dobbiamo analizzare il carattere di una serie che non sia confrontabile né con una serie geometrica né con una serie armonica ci possono essere utili alcuni criteri di convergenza alternativi. Il criterio del rapporto per le serie e il criterio della radice sono due criteri che permettono di studiare il carattere di una serie trovare il limite di una certa successione. I due criteri a volte non risultano però efficaci.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

1. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la serie converge.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

1. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la serie converge.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ o è divergente allora la serie diverge.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

1. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la serie converge.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ o è divergente allora la serie diverge.
3. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ il criterio è inefficace.

Criterio del rapporto

Esempi

Ad esempio se si vuole studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$, il criterio del rapporto ci può aiutare (il fatto che $n!$ è un infinitesimo di ordine superiore a e^n non assicura la convergenza):

Criterio del rapporto

Esempi

Ad esempio se si vuole studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$, il criterio del rapporto ci può aiutare (il fatto che $n!$ è un infinitesimo di ordine superiore a e^n non assicura la convergenza):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} n!}{(n+1)! e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1$$

Criterio del rapporto

Esempi

Ad esempio se si vuole studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$, il criterio del rapporto ci può aiutare (il fatto che $n!$ è un infinitesimo di ordine superiore a e^n non assicura la convergenza):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} n!}{(n+1)! e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1$$

Essendo $0 < 1$ per il criterio del rapporto la serie di partenza converge.

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ allora la serie converge.

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ allora la serie converge.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$ o è divergente allora la serie diverge.

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ allora la serie converge.
2. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$ o è divergente allora la serie diverge.
3. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ il criterio è inefficace.

Criterio della radice

Esempi

Ad esempio se si vuole studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, il criterio della radice ci può aiutare (**non è una serie geometrica!**):

Criterio della radice

Esempi

Ad esempio se si vuole studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, il criterio della radice ci può aiutare (**non è una serie geometrica!**):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} < 1$$

Criterio della radice

Esempi

Ad esempio se si vuole studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, il criterio della radice ci può aiutare (**non è una serie geometrica!**):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}<1$$

Essendo $\frac{1}{e}<1$ per il criterio della radice la serie converge.

Criterio di condensazione

Precedentemente abbiamo dimostrato che la serie armonica con $\alpha = 1$ è divergente ma abbiamo anche detto senza dimostrarlo che in generale la serie armonica converge per $\alpha > 1$ e che quindi è sufficiente una potenza di *n* leggermente superiore a 1 affinché la serie converga.

Criterio di condensazione

Precedentemente abbiamo dimostrato che la serie armonica con $\alpha = 1$ è divergente ma abbiamo anche detto senza dimostrarlo che in generale la serie armonica converge per $\alpha > 1$ e che quindi è sufficiente una potenza di n leggermente superiore a 1 affinché la serie converga.

E' lecito domandarsi a questo punto se la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ converga o se, più in generale, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha}(n)}$ converga. Il $\ln(n)$ come sappiamo è un infinito inferiore a qualsiasi potenza di n ma è sufficiente moltiplicare n per $\ln(n)$ al denominatore per ottenere una serie convergente? Il criterio di condensazione ci può aiutare a rispondere a tale domanda.

Criterio di condensazione

La serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ è convergente (vale la doppia implicazione).

Criterio di condensazione

La serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n}$ è convergente (vale la doppia implicazione).

Applichiamo dunque tale criterio alla serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln(n)}$:

Criterio di condensazione

La serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \, a_{2^n}$ è convergente (vale la doppia implicazione).

Applichiamo dunque tale criterio alla serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \, a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \, \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \, \ln 2}$$

che è, a meno di una costante moltiplicativa, la serie armonica con $\alpha = 1$ e quindi diverge.

Criterio di Liebniz

Serie a termini alterni

L'ultimo criterio di convergenza che vediamo è un criterio relativo alle cosiddette serie a termini alterni, l'unico tra quelli proposti che quindi non riguarda esclusivamente le serie a termini positivi. In realtà anche il criterio di Liebniz affronta lo studio del carattere di una serie a termini alterni trattando successioni monotòne a termini positivi.

Criterio di Liebniz

Serie a termini alterni

L'ultimo criterio di convergenza che vediamo è un criterio relativo alle cosiddette serie a termini alterni, l'unico tra quelli proposti che quindi non riguarda esclusivamente le serie a termini positivi. In realtà anche il criterio di Liebniz affronta lo studio del carattere di una serie a termini alterni trattando successioni monotòne a termini positivi.

Una serie a termini alterni è una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ con a_n successione a termini positivi.

Criterio di Liebniz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie a termini alterni $(a_n > 0)$. Se a_n è monotòna decrescente e infinitesima allora la serie è convergente.

Criterio di Liebniz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie a termini alterni $(a_n > 0)$. Se a_n è monotòna decrescente e infinitesima allora la serie è convergente.

Questo teorema ci permette di dimostrare che se trasformiamo la serie armonica (divergente) in una serie a termini alterni in questo modo, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ essa diventa convergente.

Criterio di Liebniz

Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie a termini alterni ($a_n > 0$). Se a_n è monotòna decrescente e infinitesima allora la serie è convergente.

Questo teorema ci permette di dimostrare che se trasformiamo la serie armonica (divergente) in una serie a termini alterni in questo modo, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ essa diventa convergente.

E' infatti semplice provare che il termine generale $a_n = \frac{1}{n}$ è monotòno decrescente e infinitesimo.

Esercizi

S