Matematica generale CTF

Successioni numeriche

Dott. Alessandro Gambini

7 agosto 2017

Successioni numeriche

Le successioni sono delle funzioni a valori reali (il codominio é l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$) il cui dominio é l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$. Ogni successione associa quindi uno o piú numeri naturali ad un valore reale.

Successioni numeriche

Le successioni sono delle funzioni a valori reali (il codominio é l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$) il cui dominio é l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$. Ogni successione associa quindi uno o piú numeri naturali ad un valore reale. Solitamente queste funzioni si descrivono con la seguente notazione: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in cui il pedice n si riferisce al numero naturale a cui a_n è associato.

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to a_n\end{aligned}$$

Successioni numeriche

Rappresentazione analitica

Quando è possibile determinare l'espressione che permette di determinare l'n-esimo termine della successione. In questo caso ogni termine è determinato dal valore della funzione f nell'n-esimo punto; possiamo scrivere $a_n = f(n)$.

Successioni numeriche

Rappresentazione analitica

Quando è possibile determinare l'espressione che permette di determinare l'n-esimo termine della successione. In questo caso ogni termine è determinato dal valore della funzione f nell'n-esimo punto; possiamo scrivere $a_n = f(n)$.

Ad esempio $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

Successioni numeriche

Elencazione

Vengono rappresentati solo le immagini della successione in sequenza (solitamente i termini sono distanziati tra loro senza alcuna punteggiatura):

$a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; \ldots$

Successioni numeriche

Elencazione

Vengono rappresentati solo le immagini della successione in sequenza (solitamente i termini sono distanziati tra loro senza alcuna punteggiatura):

$a_0 \;\; a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; \dots$

Ad esempio $a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}\right\}$

Successioni numeriche

Per ricorrenza

Una successione si può definire *per ricorrenza* se, una volta imposte condizioni iniziali, ogni termine si può calcolare come funzione di uno o alcuni suoi termini precedenti. Ad esempio, si può definire una successione imponendo la condizione iniziale sul primo termine ed esprimendo la funzione che permette di trovare il valore dell'$n+1-$termine sapendo il valore dell'$n-$termine.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = 1; \\ a_{n+1} = f(a_n). \end{cases}$$

Successioni numeriche

Per ricorrenza

Una successione si può definire *per ricorrenza* se, una volta imposte condizioni iniziali, ogni termine si può calcolare come funzione di uno o alcuni suoi termini precedenti. Ad esempio, si può definire una successione imponendo la condizione iniziale sul primo termine ed esprimendo la funzione che permette di trovare il valore dell'$n+1-$termine sapendo il valore dell'$n-$termine.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = 1; \\ a_{n+1} = f(a_n). \end{cases}$$

Ad esempio la successione di Fibonacci è una successione di numeri interi positivi in cui ciascun termine, a partire dal terzo, si ottiene come somma dei due termini precedenti:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Successioni numeriche

Per ricorrenza

Un altro esempio è l'algoritmo di Erone: questo metodo è un procedimento di calcolo che permette di calcolare la radice quadrata di un numero utilizzando solo le operazioni fondamentali dell'aritmetica. Esso si basa su considerazioni geometriche e su il metodo delle approssimazioni successive e proprio per questo, ogni termine lo riusciamo ad esprimere solo conoscendone il precedente ed ancora nessuno ha scoperto l'espressione del termine n-esimo mediante rappresentazione analitica. La sua rappresentazione per ricorrenza è la seguente (nella quale il numero di cui cerchiamo la radice quadrata lo mettiamo al posto del parametro k):

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{k}{a_{n-1}}\right) \end{cases}$$

Successioni monotòne

Una successione si definisce:

- *crescente* se $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- *decrescente* se $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- *strettamente crescente* se $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- *strettamente decrescente* se $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$

Successioni limitate

Il grafico di una successione è rappresentato da un'insieme discreto di punti. Come abbiamo visto per le altre funzioni, anche le successioni possono essere:

- *limitate inferiormente* se

$$\inf a_n = m > -\infty$$

- *limitate superiormente* se

$$\sup a_n = M < +\infty$$

- *limitate* se sono limitate sia *inferiormente* che *superiormente*.

Definizione di limite

Successioni convergenti

La cosa più interessante per una successione è stabilire cosa succede quando n diventa molto grande, diciamo per n che tende all'infinito. Questo è il primo concetto di limite per successione. Distinguiamo questi casi:

Definizione di limite

Successioni convergenti

La cosa più interessante per una successione è stabilire cosa succede quando n diventa molto grande, diciamo per n che tende all'infinito. Questo è il primo concetto di limite per successione. Distinguiamo questi casi:

Una successione a_n si dice **convergente** se per $n \to \infty$ si *avvicina* sempre di più ad un valore $l \in \mathbb{R}$. Si scrive:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

che, in termini formali, significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \overline{n} \in \mathbb{N} \, : \forall \, n > \overline{n}, |a_n - l| < \varepsilon.$$

Definizione di limite

Successioni convergenti

La cosa più interessante per una successione è stabilire cosa succede quando n diventa molto grande, diciamo per n che tende all'infinito. Questo è il primo concetto di limite per successione. Distinguiamo questi casi:
Una successione a_n si dice **convergente** se per $n \to \infty$ si *avvicina* sempre di più ad un valore $l \in \mathbb{R}$. Si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

che, in termini formali, significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n > \overline{n}, |a_n - l| < \varepsilon.$$

Se una successione è convergente allora, comunque io scelga un intorno di l sull'asse delle ordinate, da un certo valore $\overline{n}$ in poi la successione a_n rimane sempre limitata a quell'intorno.

Definizione di limite

Successioni divergenti

La stessa cosa si può definire per una successione divergente positivamente o negativamente:

Definizione di limite

Successioni divergenti

La stessa cosa si può definire per una successione divergente positivamente o negativamente:
Una successione a_n si dice **divergente** positivamente se per $n \to \infty$ la successione va a $+\infty$; cioè essa non è limitata superiormente. Analogamente si può definire una successione divergente negativamente.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

che, in termini formali, significa: $\forall M > 0 \; \exists \, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall \, n > \overline{n}, a_n > M$

Definizione di limite

Successioni divergenti

La stessa cosa si può definire per una successione divergente positivamente o negativamente:
Una successione a_n si dice **divergente** positivamente se per $n \to \infty$ la successione va a $+\infty$; cioè essa non è limitata superiormente. Analogamente si può definire una successione divergente negativamente.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

che, in termini formali, significa: $\forall M > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \forall \ n > \overline{n}, a_n > M$
Se una successione è divergente positivamente allora, comunque io scelga un un numero $M \in \mathbb{R}$ sull'asse delle ordinate grande a piacere, da un certo valore $(\overline{n})$ in poi la successione a_n sarà sempre più grande di M per ogni $n \geq \overline{n}$.

Definizione di limite

Successioni irregolari

Una successione nè convergente nè divergente si dice **irregolare**.

Definizione di limite

Successioni irregolari

Una successione nè convergente nè divergente si dice **irregolare**.
Ad esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è convergente al valore 0, la successione $a_n = n$ è divergente a $+\infty$ e la successione $a_n = (-1)^n$ è oscillante tra -1 e 1 e quindi è irregolare.

Permanenza del segno

Sia a_n una successione convergente a un limite $l > 0$ allora
$\exists \, \overline{n} \, : \forall n > \overline{n}, a_n > 0$

Permanenza del segno

Sia a_n una successione convergente a un limite $l > 0$ allora
$\exists\, \overline{n} \; : \forall n > \overline{n}, a_n > 0$
Il teorema della permanenza del segno ci dice che se una successione converge a un valore positivo l allora, da un certo valore in poi, $\overline{n}$, la successione sarà sempre positiva. Analogamente, se $l < 0$, da un certo punto in poi la successione sarà sempre negativa.

Permanenza del segno

Sia a_n una successione convergente a un limite $l > 0$ allora
$\exists\, \overline{n} : \forall n > \overline{n}, a_n > 0$
Il teorema della permanenza del segno ci dice che se una successione converge a un valore positivo l allora, da un certo valore in poi, $\overline{n}$, la successione sarà sempre positiva. Analogamente, se $l < 0$, da un certo punto in poi la successione sarà sempre negativa.
Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione numerica.

- Se a_n è monotona crescente e superiormente limitata è sempre convergente.
- Se a_n è monotona crescente e illimitata è sempre divergente a $+\infty$.
- Se a_n è monotona decrescente e inferiormente limitata è sempre convergente.
- Se a_n è monotona decrescente e illimitata è sempre divergente a $+\infty$.

Limite dell'algoritmo di Erone

Per dimostrare che una successione ammette limite occorre dimostrare che è monotona e limitata; questo non ci permette di stabilire il valore del limite ma solo la sua esistenza. Consideriamo ad esempio l'algoritmo di Erone e utilizziamolo per il calcolo ricorsivo di $\sqrt{2}$. Ricordiamo l'algoritmo di Erone

Limite dell'algoritmo di Erone

Per dimostrare che una successione ammette limite occorre dimostrare che è monotona e limitata; questo non ci permette di stabilire il valore del limite ma solo la sua esistenza. Consideriamo ad esempio l'algoritmo di Erone e utilizziamolo per il calcolo ricorsivo di $\sqrt{2}$. Ricordiamo l'algoritmo di Erone

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right) \end{cases}$$

Limite dell'algoritmo di Erone

Per dimostrare che una successione ammette limite occorre dimostrare che è monotona e limitata; questo non ci permette di stabilire il valore del limite ma solo la sua esistenza. Consideriamo ad esempio l'algoritmo di Erone e utilizziamolo per il calcolo ricorsivo di $\sqrt{2}$. Ricordiamo l'algoritmo di Erone

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right) \end{cases}$$

Se il limite esistesse, quale sarebbe il suo valore? Se $a_n \to l$ ovviamente anche $a_{n+1} \to l$ per $n \to \infty$; quindi facendo il limite ad ambo i membri della formula ricorsiva otteniamo la seguente equazione in l:

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right) \Rightarrow \cdots \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

Limite dell'algoritmo di Erone

Rimane però ancora da dimostrare che il limite esiste. Proviamo la sua esistenza dimostrando che la successione è monotòna e limitata. Per prima cosa dimostriamo (con il principio di induzione) che è limitata dal basso, in particolare che $a_n^2 > 2$: $a_1 = 2 \ \Rightarrow \ a_1^2 = 4$

Limite dell'algoritmo di Erone

Rimane però ancora da dimostrare che il limite esiste. Proviamo la sua esistenza dimostrando che la successione è monotòna e limitata. Per prima cosa dimostriamo (con il principio di induzione) che è limitata dal basso, in particolare che $a_n^2 > 2$: $a_1 = 2 \ \Rightarrow \ a_1^2 = 4$
Ora occorre provare che $a_{n+1}^2 - 2 > 0$ sfruttando l'ipotesi induttiva ($a_n^2 > 2$):

$$a_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right)^2 - 2 = \cdots = \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2} > 0$$

non può essere nullo perché per ipotesi induttiva $a_n^2 > 2$. La successione è quindi limitata dal basso.

Limite dell'algoritmo di Erone

Ora vediamo che la successione è monotòna decrescente, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \cdots > 0$$

La successione è limitata dal basso e monotòna. Quindi il limite esiste e necessariamente è $\sqrt{2}$.

Teorema del confronto

Per dimostrare che una successione è convergente può essere utile sapere che tale successione è sempre compresa tra due successioni convergenti allo stesso limite. Siano a_n e b_n due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$, allora se c_n è una terza successione tale che $a_n < c_n < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l$$

Teorema del confronto

Per dimostrare che una successione è convergente può essere utile sapere che tale successione è sempre compresa tra due successioni convergenti allo stesso limite. Siano a_n e b_n due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$, allora se c_n è una terza successione tale che $a_n < c_n < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l$$

Un ragionamento analogo può essere fatto per le successioni divergenti: se a_n è una successione divergente a $+\infty$ e c_n è una successione tale che $c_n > a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

Progressione aritmetica

La progressione aritmetica è una successione definita per ricorrenza che è possibile definirla anche come una funzione di $n \in \mathbb{N}$. E' definita in modo tale che la differenza tra due termini successivi sia costante;

Progressione aritmetica

La progressione aritmetica è una successione definita per ricorrenza che è possibile definirla anche come una funzione di $n \in \mathbb{N}$. E' definita in modo tale che la differenza tra due termini successivi sia costante; se $a \in \mathbb{R}$ è il valore iniziale della progressione e $d \in \mathbb{R}$ è quella che si chiama **ragione** della progressione aritmetica, essa si definisce nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

Progressione aritmetica

La progressione aritmetica è una successione definita per ricorrenza che è possibile definirla anche come una funzione di $n \in \mathbb{N}$. E' definita in modo tale che la differenza tra due termini successivi sia costante; se $a \in \mathbb{R}$ è il valore iniziale della progressione e $d \in \mathbb{R}$ è quella che si chiama **ragione** della progressione aritmetica, essa si definisce nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

Possiede una forma analitica:

$$\begin{aligned} a_1 = a \quad a_2 = a + d \quad a_3 &= (a+d) + d = a + 2d \\ a_4 = &(a+2d) + d = a + 3d \quad \cdots \quad a_n = a + (n-1)d \end{aligned}$$

Progressione aritmetica

E' chiaramente una successione divergente ma è interessante vedere quanto vale $\sum_{k=1}^{n} a_k$, ovvero la somma dei primi n elementi della successione:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a + (k-1)d) = \sum_{k=1}^{n} a + d\sum_{k=1}^{n}(k-1)$$

Progressione aritmetica

E' chiaramente una successione divergente ma è interessante vedere quanto vale $\sum_{k=1}^{n} a_k$, ovvero la somma dei primi n elementi della successione:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)d) = \sum_{k=1}^{n} a + d \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

sfruttando la formula della somma dei primi n numeri naturali,

$$\sum_{k=1}^{n} a + d \sum_{k=1}^{n} (k-1) = na + d\frac{n(n-1)}{2} = n\left(a + d\frac{n-1}{2}\right) =$$

$$n\left(\frac{2a + (n-1)d}{2}\right) = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Progressione aritmetica

Abbiamo così ottenuto:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Progressione aritmetica

Somma dei dispari

Con tale formula possiamo mostrare che la somma dei primi numeri dispari è sempre un quadrato.
Infatti, ponendo $a = 1$ e $d = 2$ come parametri della progressione aritmetica, otteniamo la sequenza $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots$ cioè la sequenza di tutti i numeri dispari. Calcoliamo la somma dei primi n termini della progressione (utilizzando la formula vista sopra):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + (1 + 2(n-1))) = n^2$$

Progressione geometrica

La progressione geometrica è una successione definita per ricorrenza in modo tale che il rapporto tra due termini successivi sia costante. Se $a \in \mathbb{R}$ è il valore iniziale della progressione e $q \in \mathbb{R}$ è quella che si chiama **ragione** della progressione geometrica, essa si definisce nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = q \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

Progressione geometrica

La progressione geometrica è una successione definita per ricorrenza in modo tale che il rapporto tra due termini successivi sia costante. Se $a \in \mathbb{R}$ è il valore iniziale della progressione e $q \in \mathbb{R}$ è quella che si chiama **ragione** della progressione geometrica, essa si definisce nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = q \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

Se elenchiamo i primi elementi della progressione ci accorgiamo che essa possiede una forma analitica:

$$a_0 = a \quad a_1 = a \cdot q^1 \quad a_2 = (a \cdot q) \cdot q = a \cdot q^2 \quad a_3 = a \cdot q^3 \quad \cdots \quad a_n = a \cdot q^n$$

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

- se $|q| < 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

- se $|q| < 1$, allora $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$
- se $q = 1$, allora $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

- se $|q| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- se $q = 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- se $q > 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

- se $|q| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- se $q = 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- se $q > 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- se $q = -1$, la successione oscilla sempre tra -1 e 1.

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

- se $|q| < 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- se $q = 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$
- se $q > 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$
- se $q = -1$, la successione oscilla sempre tra -1 e 1.
- se $q < -1$, la successione oscilla in modo illimitato tra $-\infty$ e $+\infty$.

Progressione geometrica

A differenza delle progressioni aritmetiche, tali successioni non sono sempre divergenti; infatti, indipendentemente dal valore iniziale a, il carattere della progressione dipende strettamente dalla ragione q, si possono presentare diversi casi:

- se $|q| < 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- se $q = 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$
- se $q > 1$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$
- se $q = -1$, la successione oscilla sempre tra -1 e 1.
- se $q < -1$, la successione oscilla in modo illimitato tra $-\infty$ e $+\infty$.

Progressione geometrica

Somma dei primi termini

E' interessante vedere che la somma dei primi n termini della progressione geometrica (poniamo $a = 1$ per semplicità) vale esattamente:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Progressione geometrica

Somma dei primi termini

E' interessante vedere che la somma dei primi n termini della progressione geometrica (poniamo $a = 1$ per semplicità) vale esattamente:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Tale formula ci sarà utile quando dovremo stabilire il carattere della cosiddetta serie geometrica. Dimostriamola per induzione:

Progressione geometrica

Somma dei primi termini

Dimostrazione

Per $n = 0$ è facilmente verificata: $q^0 = \frac{1-q^1}{1-q}$, abbiamo 1 ad entrambi i membri.

Supponiamo ora che l'ipotesi induttiva sia vera e dimostriamo che

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Progressione geometrica

Somma dei primi termini

Dimostrazione
Per $n = 0$ è facilmente verificata: $q^0 = \frac{1-q^1}{1-q}$, abbiamo 1 ad entrambi i membri.
Supponiamo ora che l'ipotesi induttiva sia vera e dimostriamo che

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Partendo dal primo membro

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$$

Progressione geometrica

Somma dei primi termini

Dimostrazione per ipotesi induttiva

$$\sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

che è uguale al secondo membro e quindi l'affermazione è provata.

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n) = a + b$

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b$

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b$
- se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b$
- se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$
- se $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b$
- se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$
- se $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- se $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}(a_n)^c = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^c = a^c$

Algebra delle successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti, in particolare $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà (che si possono dedurre facilmente a partire dalla definizione di limite):

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b$
- se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$
- se $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- se $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}(a_n)^c = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^c = a^c$

Questi calcoli **non** si possono generalizzare alle successioni divergenti.

Forme indeterminate

Il calcolo del limite di una successione può avvenire facilmente attraverso passaggi algebrici che semplificano le forme indeterminate. Le forme indeterminate che si possono verificare nel passaggio al limite sono le seguenti:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad 1^{\infty} \quad 0^{0} \quad \infty - \infty \quad \infty^{0}$$

Forme indeterminate

Il calcolo del limite di una successione può avvenire facilmente attraverso passaggi algebrici che semplificano le forme indeterminate. Le forme indeterminate che si possono verificare nel passaggio al limite sono le seguenti:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad 1^{\infty} \quad 0^{0} \quad \infty - \infty \quad \infty^{0}$$

Tali forme sono indeterminate quando si pensa ad esse come comportamento di una successione cioè quando sono ottenute come limite della successione: la progressione geometrica $a_n = 1^n$ è una successione costante sempre uguale a 1, **non** è una forma indeterminata. Lo sarebbe stata se al posto di 1 avessimo avuto una successione che tende a 1, come ad esempio $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ che vedremo nella prossima sezione.

Successioni infinitesime

Se si riesce a dimostrare che una successione ammette limite o è divergente, è interessante capire come essa si comporta asintoticamente confrontandola con alcune successioni più elementari come ad esempio la successione costituita dalle potenze di n. Questo si può fare sia per le successioni divergenti, sia per le successioni convergenti. Tra quelle convergenti assumono particolare rilevanza quelle che convergono a 0:

Successioni infinitesime

Se si riesce a dimostrare che una successione ammette limite o è divergente, è interessante capire come essa si comporta asintoticamente confrontandola con alcune successioni più elementari come ad esempio la successione costituita dalle potenze di n. Questo si può fare sia per le successioni divergenti, sia per le successioni convergenti. Tra quelle convergenti assumono particolare rilevanza quelle che convergono a 0:

Una successione a_n si dice **infinitesima** se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Successioni infinitesime

Se si riesce a dimostrare che una successione ammette limite o è divergente, è interessante capire come essa si comporta asintoticamente confrontandola con alcune successioni più elementari come ad esempio la successione costituita dalle potenze di n. Questo si può fare sia per le successioni divergenti, sia per le successioni convergenti. Tra quelle convergenti assumono particolare rilevanza quelle che convergono a 0:
Una successione a_n si dice **infinitesima** se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Esempi:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, quindi $a_n = \frac{1}{n}$ è una successione infinitesima.
- Dato $\alpha > 0$ $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ è una successione infinitesima.

Comportamento asintotico

Il **comportamento asintotico** di una successione è il comportamento della successione stessa per valori di n molto grande, ad esempio:

Comportamento asintotico

Il **comportamento asintotico** di una successione è il comportamento della successione stessa per valori di n molto grande, ad esempio:

1. La successione $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^4 + n + 1}}{n - 1} \sim 2n$ per n molto grande, cioè si comporta come un polinomio di primo grado con coefficiente 2 che è divergente e quindi anche a_n è divergente.

Comportamento asintotico

Il **comportamento asintotico** di una successione è il comportamento della successione stessa per valori di n molto grande, ad esempio:

1. La successione $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^4 + n + 1}}{n-1} \sim 2n$ per n molto grande, cioè si comporta come un polinomio di primo grado con coefficiente 2 che è divergente e quindi anche a_n è divergente.
2. La successione $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + 2}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ per n molto grande, cioè si comporta come una potenza di n di grado $-\frac{1}{2}$ che è infinitesima e quindi convergente a 0.

Criterio del rapporto per le successioni

Se una successione a_n è a termini positivi, allora valgono le seguenti affermazioni sul rapporto tra termine a_n e il suo successivo:

Criterio del rapporto per le successioni

Se una successione a_n è a termini positivi, allora valgono le seguenti affermazioni sul rapporto tra termine a_n e il suo successivo:

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la successione è infinitesima.

Criterio del rapporto per le successioni

Se una successione a_n è a termini positivi, allora valgono le seguenti affermazioni sul rapporto tra termine a_n e il suo successivo:

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la successione è infinitesima.
- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ allora la successione è divergente.

Criterio del rapporto per le successioni

Se una successione a_n è a termini positivi, allora valgono le seguenti affermazioni sul rapporto tra termine a_n e il suo successivo:

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la successione è infinitesima.
- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ allora la successione è divergente.

Nel caso il limite sia esattamente 1 non si può stabilire il carattere della successione.

Criterio del rapporto per le successioni

Se una successione a_n è a termini positivi, allora valgono le seguenti affermazioni sul rapporto tra termine a_n e il suo successivo:

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ allora la successione è infinitesima.
- se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ allora la successione è divergente.

Nel caso il limite sia esattamente 1 non si può stabilire il carattere della successione.
Tale teorema ci permette di stabilire che $a_n = \frac{n^\alpha}{c^n}$ con $c > 1$ è infinitesima cioè una successione esponenziale va più velocemente all'infinito di qualsiasi polinomio. Lo stesso si può fare per la successione $a_n = \frac{c^n}{n!}$

Il numero di Nepero

Una successione che gioca un ruolo di notevole importanza in matematica è la seguente:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Il numero di Nepero

Una successione che gioca un ruolo di notevole importanza in matematica è la seguente:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esistono varie dimostrazioni che provano l'esistenza del limite di questa successione, una di queste dimostrazioni prova che a_n è limitata superiormente dal valore 3 e che è monotona crescente. Tale dimostrazione si può fare per induzione utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli e la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica.

Il numero di Nepero

Il fatto di sapere che il limite di questa successione esista non ci permette di trovarlo facilmente. L'estremo superiore di tale successione infatti non è 3 ma il **numero di Nepero** $e = 2,718\dots$ che viene definito proprio mediante:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e$$

Il numero di Nepero

Il limite sopra citato è un limite notevole e si può scrivere in forma più generale nel modo seguente: data una successione a_n tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora vale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} := e$$

Il numero di Nepero

Consideriamo ad esempio la successione $b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ si può ricondurre a quella iniziale nel modo seguente:

$$b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 \to e^2$$

per $n \to \infty$

Utilizzando il limite notevole e il criterio del rapporto per le successioni, si può provare anche che la successione $a_n = \frac{n^n}{n!}$ è divergente e che quindi n^n va all'infinito molto più velocemente di $n!$.

Teorema di Stoltz-Cesaro

Siano a_n e b_n due successioni di cui b_n positiva, monotona crescente e illimitata. Supponiamo inoltre esista

$$\lim_{\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell.$$

Allora esiste anche il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n}$$

Svolgimento:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log(n+1) - \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)} = 1.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n}$$

Svolgimento:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log(n+1) - \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)} = 1.$$

Quindi per il Teorema di Stoltz-Cesaro anche il limite della successione di partenza vale 1.